详细解答

STEP I 样本试卷，第 5 题

纯数学 · 数字计数与阶乘

STEP I 样本试卷，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q5

关键思路

两部分考的都是仔细计数，而不是计算。在 (i) 中，先把数字按区段计数（一位数、两位数、三位数），准确找出第 1000 个数字（digit）落在哪里，然后逐个数位计数 7 的数目：个位、十位、百位。在 (ii) 中，每个末尾零（trailing zero）都对应一个因数 $10 = 2 \times 5$，而 5 比 2 稀少，所以只需计数 365! 中因数 5 的个数。

解答

第 (i) 部分

在哪里停笔？ 数 1 至 9 用了 9 个数字。90 个两位数 10 至 99 用了 180 个数字，至此合共 189 个。于是还剩下

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

个数字。首 270 个三位数是 $100, 101, \ldots, 369$，它们用了 810 个数字。最后一个数字是 370 的首位数字，即 3。所以我们完整写出了 $1, 2, \ldots, 369$，之后再写了单独一个 3。

? **想一想** 370 这个数里面有一个 7。它算不算在内？

不算。我们写完它的首位数字 3 便停笔，所以它的 7 根本没有写出来。这正是我们必须把停笔的位置准确定到某一个数字的原因。

计数 1 至 369 中的 7。我们按位值（place value）计数。每个 7 都恰好在一个数位上，所以不会重复计数；像 77 这样的数会贡献两个，这是正确的。

▶ *个位数字。*在每个完整的十个数区段 $10k, \ldots, 10k + 9$ 中，恰好有一个数以 7 结尾。0

至 359 这些数组成 36 个完整区段，给出 36 个 7：7, 17, . . . , 357。不完整的区段 360 至 369 再多添一个，即 367。合计：37。

- 十位数字。在每个完整的一百个数之中，恰好有十个数的十位数字是 7：即 70–79、170–179 和 270–279。区段 370–379 已超出 369。合计：30。
- 百位数字。不超过 369 的每个数，百位数字最大是 3（或者根本没有百位数字）。合计：0。

最后那个单独的 3 没有任何贡献。因此数字 7 共用了

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 次。}$$

第 (ii) 部分

N 在十进制（base 10）下末尾零的个数，是满足 $10^k \mid N$ 的最大的 k。由于 $10 = 2 \times 5$，这个数等于 N 的质因数分解（prime factorisation）中 2 的幂次与 5 的幂次两者中较小的一个。

计数 5 的个数。整除 365! 的 5 的幂次，等于对 $j = 1, \ldots, 365$ 把 j 中因数 5 的个数加起来的总和。5 的倍数至少贡献一个因数，25 的倍数贡献第二个，125 的倍数贡献第三个，如此类推。逐层分开计数：

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && \text{（5 的倍数），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && \text{（25 的倍数），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && \text{（125 的倍数：125, 250），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0. &&
\end{aligned}$$

一个恰好被 5^m 整除的数，在首 m 行中各被计数一次，所以它的贡献恰好是 m，正合所需。因此 365! 中 5 的幂次是

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2 并不是瓶颈。对 2 作同样的论证，可知因数 2 至少有 $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$ 个。（事实上共有 $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$ 个。）所以 $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$ 整除 365!，但 10^{90} 不能，因为 $5^{90} \nmid 365!$。

因此 365! 的末尾恰好有 **89** 个零。

验算

对于 (i)，可以快速检查停笔的位置：$9 + 180 + 3 \times 270 = 999$ 个数字刚好写到 369 的末尾，而下一个数字就是 370 的首位数字 3。用电脑写出首 1000 个数字再计数，可确

认共有 67 个 7，其中 20 个在 1–99 之中，47 个在 100–369 之中。对于 (ii)，准确计算 365!（它有 779 位数字），再计数它末尾的零。结果是 89 个，与 5 的个数吻合。可以用一个小例子亲手检验这个方法：25! 的末尾应有 $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$ 个零，而事实上 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$。

常见错误

- 把 370（甚至 371–379）当作已经写出来，于是得出 68 或更大的答案。
- 只用 $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$，忘记了 25、50、... 含有两个 5，而 125、250 含有三个 5。
- 按数而不是按数字来计数 7，以致 77、177 和 277 只计数了一次而不是两次。

STEP 之外

(ii) 中的逐层计数就是勒让德公式（Legendre's formula）：质数 p 在 $n!$ 中的幂次是 $\sum_{k\geq 1}\lfloor n/p^k \rfloor$，它亦等于 $(n - s_p(n))/(p-1)$，其中 $s_p(n)$ 是 n 在 p 进制下各位数字之和。这里 $365 = 2430_5$，数字和是 9，而 $(365-9)/4 = 89$。这条公式是库默尔定理（Kummer's theorem）的基础，该定理讨论二项式系数（binomial coefficients）的质因数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是进一步探索这类初等数论（elementary number theory）的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。