详细解答

STEP I 样本试卷，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 样本试卷，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q4

关键思路

每当见到二次式的平方根，应先配方（complete the square）。这里根号内的二次式化为 $(x+1)^2-3$，而根号外的因子亦是 $x+1$，所以平移至 $u=x+1$ 后，便得到简洁的形式 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$。这种形状（一个变量乘以“其平方减去常数”的平方根）正是正割代换（secant substitution）的用武之地，用倒数代换（reciprocal substitution）$t=1/u$ 亦同样可行。两种代换都能把无限的积分范围化为有限的范围。

解答

配方

我们有

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

当 $x\geq 1$ 时此式为正，因为此时 $(x+1)^2\geq 4>3$，所以被积函数（integrand）在整个 $[1,\infty)$ 上都有定义。设 $u=x+1$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，当 $x=1$ 时 $u=2$，而当 $x\to\infty$ 时 $u\to\infty$：

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

当 u 很大时，被积函数的表现近似 $1/u^2$，所以这个积分收敛（converges）。

正割代换

设 $u=\sqrt{3}\sec\theta$，其中 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$。则

$$\mathrm{d}u=\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad \sqrt{u^2-3}=\sqrt{3(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{3}\tan\theta,$$

这里我们用了在此范围内 $\tan\theta \geq 0$ 这一事实，从而去掉绝对值（modulus）符号。

> **想一想** 新的积分上下限是甚么？

在 $u = 2$ 时，我们需要 $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$，即 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$。当 $u \to \infty$ 时，$\sec\theta \to \infty$，所以 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（从下方趋近）。这个代换在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上是递增的，所以上下限的次序保持不变。

现在所有东西都约去了：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

另一做法：倒数代换

假如一时想不起正割，$t = 1/u$ 同样奏效，而且立刻把积分范围变为有限。取 $u = 1/t$，则 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$，而且对于 $t > 0$

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

上下限 $u = 2$ 和 $u \to \infty$ 变为 $t = \frac{1}{2}$ 和 $t \to 0$，而负号把两者的次序对调：

$$I = \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}\,t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

与第一种方法的结果一致。

验算

- 对原函数（antiderivative）$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$ 求导，便可还原出被积函数；于是 $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$。
- 粗略估计大小：在 $[1,\infty)$ 上，被积函数比 $1/(x+1)^2$ 稍大，而后者的积分是 $\frac{1}{2}$。我们的答案是 $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$，略高于 $\frac{1}{2}$，正如所料。
- 对原积分作数值积分（numerical quadrature）（把范围分段，并以 $x = 1/w$ 消去无限长的尾段），得 0.604600，与 $\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$ 吻合。

常见错误

- 忘记更改上下限：下限是 $\theta = \frac{\pi}{6}$，而不是 0；用 0 会得出错误答案 $\pi/(2\sqrt{3})$。
- 写下 $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$，却没有检查 $\tan\theta$ 在所用范围内的正负号。
- 把答案留作 $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$“在无穷远处”取值，而没有正确地取极限。

STEP 之外

这是一个广义积分（improper integral）：严格来说，它的意思是 $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$，而大学一年级的分析课程会精确说明这类极限何时存在（与 $\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$ 作比较是标准的判别法）。这里的代换亦是一套一般理论的起点：对于有理函数（rational function）R，求 $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ 的积分，总可以化为求有理函数的积分。关于广义积分和比较判别法（comparison test），可参阅 Abbott, *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。