详细解答

STEP I 样本试卷，第 3 题

纯数学 · 二阶微分方程

> **STEP I 样本试卷，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q3

关键思路

二阶方程难解，两个一阶方程却容易。题目建议的代换（substitution）$z = y' - y$（以 y' 表示 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$）经过特意挑选，使方程左边化为只含 z 和 z' 的式子。这样便得到一个关于 z 的一阶线性方程（first-order linear equation），然后再得到一个关于 y 的一阶线性方程；两者都可以用积分因子（integrating factor）解决。

解答

降阶

设 $z = y' - y$，则 $z' = y'' - y'$。我们把方程左边相应地拆开：

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

于是方程变成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

由初始条件（initial conditions）得 $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$。

> ? **想一想** 你会怎样想到 $(y'' - y') + 3(y' - y)$ 这个拆法?

我们需要 $y'' + 2y' - 3y$ 等于 $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$，其中 k 为某个常数。比较 y' 项得 $k = 3$，而此时 $-ky = -3y$ 亦吻合。（这个做法之所以可行，是因为 1 是辅助方程（auxiliary equation）$m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$ 的一个根；另一个根 -3 正是 $z' + 3z$ 中出现的数。）

求 z

乘以积分因子 e^{3x}，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z\mathrm{e}^{3x}) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

当 $x = 0$ 时，$1 = \frac{1}{2} + A$，所以 $A = \frac{1}{2}$，而

$$z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

求 y

现在 $y' - y = z$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

积分因子是 e^{-x}：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-x}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

当 $x = 0$ 时，$1 = -\frac{1}{8} + B$，所以 $B = \frac{9}{8}$。各项乘以 e^{x}，

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

留意我们在这里只用了 $y(0) = 1$；条件 $y'(0) = 2$ 在求 $z(0)$ 时已经用过，所以两个条件都已用上。

验算

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$，而由 $y' = \left((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\right)/8$ 得 $y'(0) = 16/8 = 2$。
- 代入验证：e^{-3x} 是齐次方程（homogeneous equation）的解（$9 - 6 - 3 = 0$），e^{x} 也是（$1 + 2 - 3 = 0$）。对于 $x\mathrm{e}^{x}$，$y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$ 乘以 e^{x}，所以 $\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$ 刚好贡献 $2\mathrm{e}^{x}$。
- 数值上，用龙格—库塔法（Runge–Kutta method）由 $x = 0$ 起逐步计算原方程，得 $y(1) \approx 4.41098$，与 $(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$ 相符。

常见错误

- 在最后再用一次 $y'(0) = 2$，或者忘记把它转换成 $z(0) = 1$。
- 改用“其他方法”而尝试特别积分（particular integral）$c\,\mathrm{e}^{x}$：由于 e^{x} 本身已是齐次方程的解，这样做行不通，需要改用 $cx\mathrm{e}^{x}$。代换法会自动处理这个问题。

STEP 之外

这个代换其实是把微分算子（differential operator）作因式分解：以 D 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，方程就是 $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$，而 $z = (D-1)y$。这样把算子分解，可以解释常系数线性方程的整套理论，包括为何重根或“共振”（resonant）根会带来额外的因子 x。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）对此有系统的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。