详细解答

STEP I 样本试卷，第 2 题

纯数学 · 三角学与最优化

STEP I 样本试卷，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q2

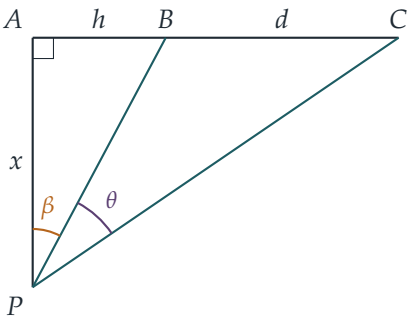
关键思路

角 θ 是以 P 为顶点的两个角之*差*，而这两个角各自位于一个直角在 A 的直角三角形内。它们的正切值可以直接从图中读出，因此只要用上 tan 的减法公式（subtraction formula）便可。至于求最大值，可把 $\tan\theta$ 改写成 x 只在一处出现的形式，即 $x + (\text{常数})/x$，再用算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality）便大功告成，完全不必动用微积分。

解答

求 $\tan\theta$

设 $\alpha = \angle APC$ 及 $\beta = \angle APB$。由于 B 位于 A 与 C 之间，故 $\theta = \alpha - \beta$。



在直角三角形 PAC 和 PAB 中（直角在 A），

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

由减法公式，

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

分子和分母同乘以 x^2，得

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

（分母 $1+\tan\alpha\tan\beta$ 为正数，所以这条公式永远不会失效。）

求 θ 的最大值

> ? **想一想** 使 $\tan\theta$ 最大，是否等同于使 θ 最大?

在这里是的。α 和 β 都严格介乎 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间，而且 $\alpha > \beta$，所以 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。在这个区间上 tan 是严格递增（strictly increasing）的，因此 $\tan\theta$ 最大时 θ 也最大。

把分子和分母同除以 $x > 0$，得

$$\tan\theta = \frac{d}{x + \dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

由于 d 是固定的，当分母 $x + h(h+d)/x$ 最小时，$\tan\theta$ 便最大。两项皆为正数，故由算术平均—几何平均不等式，

$$x + \frac{h(h+d)}{x} \;\geq\; 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

等号成立当且仅当两项相等，即 $x = h(h+d)/x$，亦即 $x^2 = h(h+d)$。所以分母取得最小值、θ 取得最大值之处为

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

此时 $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$。

*或用微积分。*设 $k = h(h+d)$ 及 $f(x) = dx/(x^2+k)$，由商法则（quotient rule）得

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

它在 $0 < x < \sqrt{k}$ 时为正，在 $x > \sqrt{k}$ 时为负，所以 f 先上升至 $x = \sqrt{k}$ 处的唯一极大值，然后下降。算术平均—几何平均不等式的做法较快，而且一眼便看出这个极大值是全局最大值（global maximum）。

验算

- 极限：当 $x \to 0$ 或 $x \to \infty$ 时，公式给出 $\tan\theta \to 0$。这是合理的：从非常接近 A 的位置，或从非常远的地方看，线段 BC 在 P 所对的角几乎为零。所以两者之间必定有一个最大值。
- 对称性：把 x 换成 $h(h+d)/x$ 时，$\tan\theta$ 保持不变，所以最大值必定出现在这个对换的不动点（fixed point），即 $x = \sqrt{h(h+d)}$。取 $h = 2$、$d = 1$，则 $x = 2$ 和 $x = 3$ 两点给出相同的角（约 $11.31°$），而最大值在 $x = \sqrt{6}$ 处，约为 $11.54°$。
- 取 $h = 1$、$d = 3$：$x = 2$，而 $\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$，是 3–4–5 三角形中的角，即 $36.87°$。随机抽取 20 000 组 (h, d, x)，直接由坐标计算 θ，结果与公式相符至 10^{-14}；以数值方法搜索使角最大的 x，每次都与 $\sqrt{h(h+d)}$ 吻合。

常见错误

- 写成 $\tan\theta = d/x$，仿佛 θ 位于一个直角三角形内。事实并非如此：直角在 A，不在 BC 上。
- 求 $\tan\theta$ 的最大值，却没有说明为何这样便使 θ 最大；这需要 θ 一直处于 tan 递增的区间内。

STEP 之外

这个答案有一个漂亮的几何解释。使 BC 所对的角为定值的点，都位于通过 B 和 C 的圆的弧上；在仍然与直线 AP 相交的这类圆之中，最小的一个给出最大的角，而这个圆正是在 P 与该直线相切的那一个。切割线定理（tangent–secant theorem，即点 A 的幂）随即给出 $AP^2 = AB \cdot AC$，这正是 $x^2 = h(h+d)$。这就是雷格蒙塔努斯（Regiomontanus）问题，常见的问法是“应该站在哪里，才能把基座上的雕像看得最清楚?”。要优化某个量，先转而考虑另一个较易处理、但与它同升同降的量——这个想法贯穿大学一年级的分析学（analysis）；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一书中还有很多同类的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。