详细解答

STEP I 样本试卷，第 15 题

概率与统计 · 随机变量之和

STEP I 样本试卷，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q15

关键思路

C 这个看似古怪的分布，其实正是把一个价钱四舍五入至最接近的 10 便士时所产生的误差，前提是价钱的最后一位数字等可能地取 $0, 1, \ldots, 9$ 中任何一个。于是，购物者的总误差就是 36 个独立而与 C 同分布的变量之和，其平均值和方差（variance）可立即求得，而中心极限定理（Central Limit Theorem）则告诉我们，20 便士的差额有多令人意外。

解答

C 的期望值与方差

由于对每个 i 都有 $\mathrm{P}(C = i) = \mathrm{P}(C = -i)$，这个分布关于 0 对称。因此各项 $i\,\mathrm{P}(C = i)$ 两两抵消，得

$$\mathrm{E}(C) = 0.$$

（各概率之和确实是 1：$9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = 1$。）既然平均值是 0，方差就只是 $\mathrm{E}(C^2)$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) &= 2 \cdot \frac{25}{20} + \frac{2}{10}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2 \cdot 30}{10} = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

购物者的估算

模型。 对于一件货品，设 C 为实际价钱减去舍入后的价钱，以便士为单位。它只取决于价钱的最后一位数字 d。我们假设 d 等可能地取 $0, 1, \ldots, 9$ 中任何一个；在这里，“随机”选购理应是这个意思，不过这毕竟是对现实价钱所作的一个假设。

- $d = 0$：无须舍入，所以 $C = 0$。
- $d = 1, 2, 3, 4$：价钱向下舍入了 d，所以 $C = d$。
- $d = 6, 7, 8, 9$：价钱向上舍入了 $10 - d$，所以 $C = -(10 - d)$，即 $-4, -3, -2, -1$。
- $d = 5$：价钱以相等的概率向下或向上舍入，所以 $C = 5$ 或 -5，各自的概率为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$。

$-4, \ldots, 4$ 中每个值都恰好由一个数字产生，概率为 $\frac{1}{10}$，而 ± 5 的概率各为 $\frac{1}{20}$。这正正是第一部分的分布，题目如此设置的原因也在于此。

总误差。 设 $C_1, \ldots, C_{36}$ 为 36 件货品各自的误差，并设

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{36}$$

为真正的账单金额减去购物者的估算。由于货品是随机选购的，我们视各个 C_j 为独立（independent），且每个都与 C 同分布。于是

$$\mathrm{E}(S) = 36 \cdot 0 = 0, \qquad \mathrm{Var}(S) = 36 \cdot \tfrac{17}{2} = 306,$$

其中计算方差时用到了独立性。因此 S 的标准差（standard deviation）是 $\sqrt{306} \approx 17.5$ 便士。

> **想一想** 20 便士的差额算大还是算小?

这个差额必须与标准差比较，而不是与单次舍入误差的大小比较。收银员的账单比估算高出 20 便士，即 $S = 20$。这比平均值高出

$$\frac{20}{\sqrt{306}} \approx 1.14$$

个标准差。由于 S 是 36 个独立同分布变量之和，中心极限定理指出 S 近似服从 $\mathrm{N}(0, 306)$。采用连续性校正（continuity correction）（因为 S 只取整数值），

$$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{19.5}{\sqrt{306}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.11) \approx 0.13,$$

其中 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$。至少这么大的误差（不论方向）大约有 26% 的机会出现。

所以购物者**不**应怀疑账单出错。20 便士的差额完全在她的舍入误差的正常波动范围之内，大约是一个标准差，而且大约每七、八次购物就会出现一次。只有差额超过大约两个标准差，例如 35 便士或以上，她才有真正的理由起疑。

验算

- 把价钱四舍五入至最接近的 10 便士，最多只会令它改变 5 便士，所以 36 件货品在最坏情况下的误差是 180 便士。典型误差约为 17 便士，远小于此，这也合乎预期：正误差与负误差大致互相抵消。
- 电脑验证了舍入误差的分布与 C 完全相同，且 $\mathrm{E}(C) = 0$、$\mathrm{Var}(C) = \frac{17}{2}$。接着它以分数对 36 个相同的分布作精确卷积（convolution）：$\mathrm{Var}(S) = 306$，$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx 0.1330$；相比之下，正态近似（normal approximation）给出 0.1325，而 2×10^5 次模拟购物则给出 0.132。

常见错误

- 把 $\mathrm{Var}(S)$ 当作 $36^2\,\mathrm{Var}(C)$。那其实是 $36C$ 的方差，即同一个误差重复 36 次；对于独立的误差，方差只须直接相加。
- 以 S 恰好等于 20 的概率（约 0.012）来衡量意外的程度。S 的每一个个别取值本身都相当不可能出现；真正重要的，是误差至少与观察所得一样大的概率。
- 忘记说明所作的假设：价钱的最后一位数字服从均匀分布（uniform distribution），而且各件货品的误差互相独立。

STEP 之外

这就是假设检验（hypothesis test）背后的推理：先假定一切正常（在这里，即 S 纯粹是舍入误差），然后问：出现至少与观察所得同样极端的结果，可能性有多大？同样的舍入误差分析也用于数值分析（numerical analysis），在那里，对许多数字作舍入所产生的误差，通常随数字个数的平方根增长，而非线性增长。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门）对随机变量（random variable）之和及中心极限定理有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。