详细解答

STEP I 样本试卷，第 14 题

概率与统计 · 期望值

STEP I 样本试卷，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

关键思路

一切都取决于一个表：两颗公平四面骰子点数总和的分布（distribution）。有了这个表，无论猜哪个 x，期望收益（expected gain）都只是“奖金乘以胜出的机会，减去罚款乘以落败的机会”。有趣的矛盾在于：猜大的数字奖金高，但机会小，所以要把所有猜测逐一比较，才看得出哪个最好。

解答

设 S 为总点数。每颗骰子掷出 $1,2,3,4$ 的概率（probability）各为 $\frac{1}{4}$，而且两颗骰子互相独立（independent），所以 16 个有序对（ordered pairs）出现的可能性均等。数出每个总和对应的有序对数目，得

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

（例如，$S=5$ 来自 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$）。

若 B 猜 x，并设 $p=\mathrm{P}(S=x)$，则他的收益 G（以便士计）有 p 的概率为 $100x^2$，有 $1-p$ 的概率为 $-50x$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x[(2x+1)p-1].\end{aligned}$$

写成 $p=\frac{k}{16}$，其中 k 是得出总和 x 的方法数目，则

$$\mathrm{E}(G)=\frac{25x[k(2x+1)-16]}{8}.$$

第 (i) 部分

只有 $(4,4)$ 的总和是 8，所以 $p = \frac{1}{16}$，而

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

因此 B 猜 8 时的期望收益是 25 便士，正如题目所求。

第 (ii) 部分

猜 $2, 3, \ldots, 8$ 以外的数永远不会胜出，所以（取 x 为正数，因为点数必为正数）只会输钱。对于七个可能的总和，上面的公式给出

x	2	3	4	5	6	7	8
k	1	2	3	4	3	2	1
$\mathrm{E}(G)$（便士）	−68.75	−18.75	137.5	437.5	431.25	306.25	25

例如，当 $x = 5$ 时：$\mathrm{E}(G) = \frac{25 \cdot 5\,(4 \cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125 \cdot 28}{8} = 437.5$。

想一想 奖金按 x^2 的速度增长，那么为甚么猜 7 或 8 这样的大数并不是最好?

奖金确实增长得很快，但胜出的机会在 5 的两侧逐渐下降，而猜错的可能性大得多，一旦猜错就要付罚款。在 $x = 8$ 时，胜出的机会已跌至 $\frac{1}{16}$，几乎刚好抵销了高额奖金。这两种效应在中间附近取得最佳平衡：$x = 6$ 的奖金比 $x = 5$ 高，但胜出的方法只有三种而不是四种，结果仅仅稍逊一筹。

所以我们建议 B 猜 $\boxed{x = 5}$，期望收益为 437.5 便士，即每局 £4.375（约 £4.38）。

验算

- 表中各概率之和为 $\frac{16}{16} = 1$。
- 第 (i) 部分的结果刚好是 25，印证了分布表和公式。
- 模拟 400 000 局猜 5 的游戏，平均收益约为 437.2 便士，而准确值是 437.5。

常见错误

- 把总和 2 至 8 当作可能性均等：其实不然，因为可能性均等的结果是那 16 个有序对。
- 忘记 B 是以 $1 - p$ 的概率输掉 $50x$，而不是以概率 1 输掉。
- 因为奖金较高，就停在 $x = 6$ 或 $x = 7$：5 和 6 的结果很接近，所以每个值都必须计算。

STEP 之外

这是一个小型的决策问题：选择令期望回报最大的行动。在大学里，同样的想法会在决策论（decision theory）中出现，也会在研究独立随机变量（random variables）之和时出现；在后者，和的分布是用卷积（convolution）求出的（在这里就是分布表的三角形状），而当骰子数目很多时，根据中心极限定理（central limit theorem），这个分布会趋近正态曲线（normal curve）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）涵盖了这两个课题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。