详细解答

STEP I 样本试卷，第 13 题

力学 · 圆周运动

STEP I 样本试卷，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q13

关键思路

这是一个弦线可以伸长的圆锥摆（conical pendulum）。胡克定律（Hooke's law）把张力（tension）与弦线的长度联系起来，而沿垂直和水平方向分解力，则把张力与 g 和 ω 联系起来。由于弦线与垂直线的夹角不为零，张力必须严格大于 mg，而两个不等式都是由这一项事实推导出来的。

解答

把质点视为系于一条轻弹性弦线（light elastic string）上的点质量，弦线遵从胡克定律，并且不计空气阻力。设 λ 为弹性模量（modulus of elasticity）。

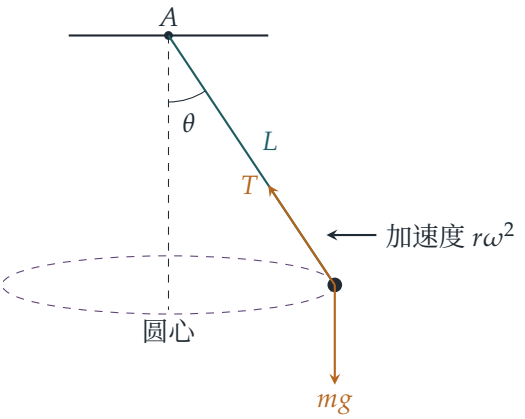
弹性模量。 质点静止悬挂时，弦线的伸长量（extension）为 $2a - a = a$，而张力与重量平衡：

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

因此当弦线的长度为 L 时，其张力为

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

圆周运动。 假设质点在 A 下方的一个水平圆上运动，长度为 L 的弦线与向下的垂直线成 θ 角。由于这是一个位于 A 所在水平之下的真正的圆周运动，我们有 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\theta > 0$ 且 $0 < \cos\theta < 1$。圆心在 A 的正下方，半径为 $r = L\sin\theta$。



质点绕通过 A 的垂直线的角速率（angular speed）为 ω，所以它的加速度为 $r\omega^2 = L\omega^2 \sin\theta$，方向水平指向圆心。垂直方向没有加速度。

沿垂直方向分解：

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

沿水平方向（指向圆心）分解：

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

其中因为 $\sin\theta \neq 0$，我们可以除以 $\sin\theta$。

> **想一想** “这是一个真正的圆周运动（而不只是质点静止悬挂）”这项事实，在哪里用到了？

它用到了两次：在 (2) 中除以 $\sin\theta$，以及在下文指出 $\cos\theta < 1$。若 $\theta = 0$，质点只是静止悬挂在轴上，(2) 没有提供任何信息，而任何 ω 都“行得通”。

弦线长于 $2a$。 由 (1)，因为 $0 < \cos\theta < 1$，

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

利用胡克定律，这即是说

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad\Longrightarrow\quad L - a > a \quad\Longrightarrow\quad L > 2a,$$

所以弦线被拉长至大于 $2a$ 的长度。

ω 的范围。 把由胡克定律和由 (2) 得到的两个 T 的表达式等同起来：

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

由于 $L > 2a$，我们有 $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$。因此

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

这正是我们要证明的结果。

逆命题（converse）（题目没有要求，但令人安心）。若 ω 位于这个范围内，取 $L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$。它是正数，满足 $L > 2a$，并给出 $\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$，其值严格介乎 0 与 1 之间。所以对于每一个这样的 ω，确实存在一个圆锥运动。

验算

- 极限：当 $L \to 2a$ 时，张力趋向 mg，$\theta \to 0$ 且 $\omega^2 \to g/(2a)$，这正是长度为 $2a$ 的单摆（simple pendulum）作小幅摆动的频率。当 $L \to \infty$ 时，$\omega^2 \to g/a$。
- 数值方面：取 $\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$，我们得到 $L = 4a$、$T = 3mg$ 和 $\cos\theta = \frac{1}{3}$。从这些初始条件出发，以数值方法逐步求解完整的三维运动方程，计算两周，质点始终留在所预测的圆上，误差不超过 10^{-13} 个单位。
- 单位：g/a 的单位是 s^{-2}，与 ω^2 应有的单位相符。

常见错误

- 把圆的半径当作 L 而不是 $L\sin\theta$。这样 (2) 中的 $\sin\theta$ 便无法约去。
- 忘记了 $T > mg$ 需要 $\cos\theta < 1$，即 $\theta \neq 0$。严格不等式正是取决于这一点。
- 以自然长度（natural length）a（或平衡时的长度 $2a$）而不是拉长后的长度 L 作为半径。

STEP 之外

下限 $\omega^2 = g/(2a)$ 是绕垂直线作小幅振动的频率，而这并非巧合：靠近轴的稳定圆锥运动，其实就是两个互相垂直的小幅摆动，彼此相位相差四分之一个周期。上限则是弦线的刚度（stiffness）无论伸长多少都再也无法提供向心力（centripetal force）之处。研究稳定运动及其稳定性（stability），例如探讨质点被轻轻推离圆形轨道后会发生甚么事，是大学一年级动力学的标准课题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对圆锥摆以及旋转系统中运动的分析，有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。