详细解答

STEP I 样本试卷，第 12 题

力学 · 涉及摩擦力的碰撞

STEP I 样本试卷，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q12

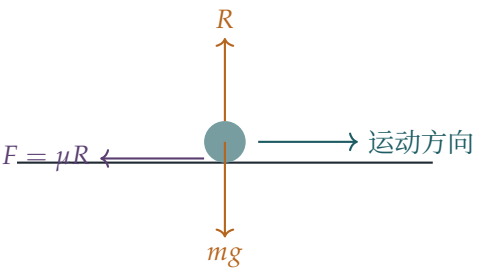
关键思路

这一题的主角是摩擦力（friction）。圆盘在水平冰面上滑行时，受到恒定的阻力，因此减速度（deceleration）不变，各事件之间的运动其实只是“匀加速运动”换了个面貌。我们由终点倒推回去：B 的停止距离决定了它在碰撞后的速率，碰撞定律把这个速率转化为 A 在碰撞前一刻的速率，再用一次匀加速运动的公式，便可回到起点 O。

解答

模型

把每个圆盘视为质量为 m 的质点（particle），置于摩擦系数（coefficient of friction）为 μ 的粗糙水平面上。圆盘滑行时，所受的力有：向下的重量 mg、向上的法向反作用力（normal reaction）R，以及与运动方向相反的极限摩擦力（limiting friction）F。



沿垂直方向分解：垂直方向没有加速度，所以 $R = mg$。圆盘正在滑动，故摩擦力达到极限值：$F = \mu R = \mu mg$。沿水平方向分解，$m\ddot{x} = -\mu mg$，所以每个滑行中的圆盘都以恒

定的减速度

$$a = \mu g,$$

减速，与其质量无关。我们又假设碰撞在瞬间完成，摩擦力在碰撞过程中来不及起作用；这时只需考虑两圆盘之间的碰撞力，而沿 OC 方向的动量（momentum）守恒。

B 在碰撞后的速率

B 由距离 O 为 d 的一点出发，停在距离 O 为 $2d$ 的 C 点，所以它滑行的距离是 d。设它在碰撞后一刻的速率为 w。利用 $v^2 = u^2 + 2as$，其中末速率为 0，加速度为 $-\mu g$，位移为 d，

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

这正是所要求的结果。

A 在碰撞前一刻的速率

设 A 以速率 u 撞向 B，并设 A 在碰撞后一刻的速度为 v_A（两者均以 $O \to C$ 的方向为正）。由于两圆盘质量同为 m，动量守恒（conservation of momentum）给出

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

而牛顿（Newton）实验定律给出

$$w - v_A = eu.$$

两式相加可消去 v_A：$2w = (1+e)u$，所以

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

（若改为两式相减，则得 $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$，所以 A 会以较慢的速率沿原来方向继续前进。）

想一想 A 会不会再次追上 B，令以上的计算失效?

不会。碰撞之后，两个圆盘都以相同的减速度 μg 减速，所以只要两者仍在运动，它们的速率差 $w - v_A = eu$ 便保持不变。B 永远不会比 A 慢，所以一直在前面；而 A 起步较慢，会先停下来。因此碰撞恰好只有一次，B 由 d 到 $2d$ 的一段路程不受干扰。（当 $e = 0$ 时，两个圆盘一起运动直至停下，同样不会再有碰撞。）

初速率

A 由 O 滑行距离 d 到达 B，期间以 μg 减速，所以再用一次 $v^2 = u^2 + 2as$，

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

代入 u 的表达式,

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{4\cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(4+(1+e)^2) \\ &= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(5+2e+e^2). \end{aligned}$$

由于 $U>0$ 且 $1+e>0$，取正平方根,

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}(5+2e+e^2)^{\frac{1}{2}},$$

即为所求。

验算

- 完全弹性（perfectly elastic），$e=1$：两个相同的圆盘会互换速度，所以 A 立即停下，而 B 则以 A 抵达时的速率 $u=w$ 离开。公式给出 $U=\sqrt{2}\sqrt{2\mu g d}=\sqrt{2\mu g(2d)}$，恰好是单独一个圆盘滑完整段 $2d$ 到达 C 所需的速率。这很合理：动量原封不动地传了过去。
- 完全非弹性(perfectly inelastic),$e=0$:公式给出 $U=\sqrt{5}\sqrt{2\mu g d}$,比 $e=1$ 时大,这是应有的结果,因为碰撞中有动能(kinetic energy)损失。更一般地,$(5+2e+e^2)/(1+e)^2 = 1+4/(1+e)^2$ 随 e 增大而减小。
- 量纲（dimensions）：μ 和 e 都是纯数，而 $\sqrt{gd}$ 是速率。
- 数值上, 取 $\mu=0.1$、$g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$d=1\,\mathrm{m}$ 和 $e=0.5$, 公式给出 $U=\frac{7}{3}\approx 2.33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。由这个 U 出发，以细小的时间步长逐步推算运动（并随机选取多组 μ、d 和 e），结果 B 停下的位置与 O 的距离和 $2d$ 相差不超过 0.001%。

常见错误

- 对碰撞前后使用能量守恒。除非 $e=1$，否则碰撞中会有动能损失；碰撞时应使用动量和恢复定律（restitution law），而功能原理（work–energy，或 $v^2=u^2+2as$）只可用于各事件之间。
- 忘记 A 在碰撞前同样要滑行距离 d，误写成 $U=u$。
- 把恢复定律写反了：应该是分离速率 $w-v_A$ 等于 e 乘以接近速率 u。

STEP 之外

这一题的巧妙之处，在于摩擦力令每个圆盘都有相同的减速度，与质量无关；因此在一个以 μg 减速的参考系（frame）中，只要两个圆盘都在滑行，冰面便等同于没有摩擦，而碰撞看起来就和教科书上的一模一样。选取合适的参考系是大学本科力学的核心技巧，而摩擦定律 $F = \mu R$ 本身只是一个经验模型，它的适用范围值得了解。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对碰撞和摩擦都有细致的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。