详细解答

STEP I 样本试卷，第 11 题

力学 · 摩擦力与滚动接触

STEP I 样本试卷，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

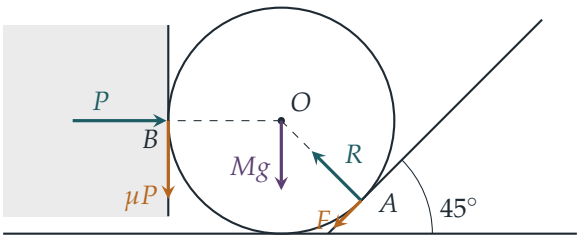
关键思路

在圆柱体即将移动的一刻，地面不再施力，因此只需考虑三个作用：重量、垂直面和斜面。“滚动”表示圆柱体在斜面上不打滑，所以它开始绕着与斜面的接触点转动。只要找出与垂直面接触的那一点此时如何运动，便会发现圆柱体必须沿垂直面滑动。因此，摩擦力（friction）正是在那里达到极限。再对圆心取力矩（moment），便可毫不费力地求得斜面的摩擦力。

解答

模型。圆柱体是半径为 r 的均匀刚体（rigid body），我们在通过其中心 O 的垂直截面上处理这个问题。设备的面是垂直的，并沿水平方向移动。设 B 为圆柱体与该面的接触点，它与 O 处于同一高度；A 为圆柱体与斜面的接触点。由于斜面的倾角为 45°，OA 与向下的铅垂线成 45°。取 x 轴向右（指向斜面），y 轴向上，并以 O 为原点，于是

$$B = (-r,\, 0), \qquad A = \tfrac{r}{\sqrt{2}}(1,\, -1).$$



哪一处的摩擦力达到极限

当圆柱体即将移动时，它正要离开地面，所以地面的法向反作用力（normal reaction）为零，地面的摩擦力亦随之为零。要滚上斜面，圆柱体在 A 点必须不打滑，所以它的运动以绕 A 的转动开始，而中心则沿 $(1,1)$ 方向向斜面上方移动。这个转动是顺时针方向的。设角速率（angular speed）为 ω，则圆柱体上一点 X 的速度等于 ω 乘以 $X-A$ 顺时针旋转 90° 后所得的向量，即把 $\omega\,(y,-x)$ 用于 $X-A=(x,y)$。对于 $X=B$，

$$B-A=r\Big(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

该面只作水平移动，但 B 的速度有向上的分量，所以 B 沿该面向上滑动。圆柱体不可能同时在两个表面上滚动，所以它必定在垂直面上打滑，因此**摩擦力在垂直面上达到极限**。摩擦力与滑动方向相反，所以它作用于圆柱体的方向是向下，大小为 μP。在斜面上没有打滑，所以斜面摩擦力 F 的大小由平衡（equilibrium）条件决定，只须满足 $F\le\nu R$。（我们以 ν 表示斜面的摩擦系数（coefficient of friction），题目中印作 v。）

> ? **想一想** 为甚么不可以是斜面上的摩擦力达到极限?

假如圆柱体在 A 点打滑，它便是沿斜面向上滑动，而不是滚动。滚动的意思就是在 A 点不打滑。上面的计算显示，滚动必然导致 B 点打滑，所以 B 才是摩擦力达到法向反作用力的 μ 倍的接触点。

求 P

设 R 为斜面的法向反作用力，沿 AO 方向（方向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$），并设 F 为斜面摩擦力，以沿斜面向下为正（方向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$）。

对 O 取力矩。重量、P 和 R 的作用线全部通过 O。B 点的摩擦力 μP 的力臂为 r，使圆柱体逆时针转动。A 点的摩擦力 F 沿切线方向，所以力臂同样为 r；当它指向斜面下方时，会使圆柱体顺时针转动。因此

$$\mu P\,r=Fr\quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

所以斜面摩擦力确实沿斜面向下，而且大小与垂直面上的摩擦力相同。

沿水平方向分解：

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0\quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu).\tag{1}$$

沿垂直方向分解：

$$\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}-\mu P-Mg=0.\tag{2}$$

把由 (1) 得出的 $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$ 代入 (2)，

$$P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P = Mg$$
$$P(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu) = Mg,$$

其中用到 $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$。因此

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

正是所求的结果。

μ 和 ν 须满足的条件

关于 μ。 P 是推力的大小，而 $Mg > 0$，所以我们需要 $1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$，即

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

若 $\mu \geq \sqrt{2} - 1$，无论推力多大，都无法把圆柱体滚上斜面：垂直面上额外的向下摩擦力随 P 增长的速度，至少与上升力的增长一样快，于是圆柱体被卡死。

关于 ν。 圆柱体在斜面上不打滑，所以 $F \leq \nu R$。利用 $F = \mu P$ 和 (1)，并留意到由于 $\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$，故 $R > 0$，

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

其中我们除以了 $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$。至此全题完成。

验算

- 光滑的面，$\mu = 0$：此时 $P = Mg$，而且不需要斜面摩擦力。这与一个无摩擦的圆柱体楔在垂直墙壁与 45° 斜面之间的情况吻合：斜面反作用力的水平分量和垂直分量相等，所以它必须同等地平衡 P 和 Mg。
- 数值：取 $\mu = 0.2$，则 $P \approx 1.934\,Mg$，而我们需要 $\nu \geq 0.165$。把这些数值代回去，水平方向的力、垂直方向的力以及对 O 的力矩全部平衡（在舍入误差之内）；对随机选取的 M 和 μ 亦然。
- 当 $\mu \to \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ 时，$P \to \infty$，这与上文所述的卡死现象一致。

常见错误

- 把斜面上的摩擦力当作达到极限。“滚动”已排除了该处打滑的可能。

- 保留了地面的反作用力。在即将滚上斜面的一刻，圆柱体正要离地，所以地面的反作用力为零。
- 弄错垂直面上摩擦力的方向。B 相对于该面向上移动，所以作用于圆柱体的摩擦力是向下的。这正是 P 大于 Mg 的原因。

STEP 之外

本题的关键一步，是借着观察瞬时转动中心（instantaneous centre of rotation）来判断哪一个接触点打滑，这正是刚体运动学（rigid-body kinematics）的起点。在大学一年级的课程中，它会引伸出一般法则 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$，以及多个粗糙接触点互相竞争的问题。在 $\mu \geq \sqrt{2} - 1$ 时出现的“卡死”现象，即怎样加大推力也无济于事，是一种自锁（self-locking）效应，工程师会在楔子和夹具中刻意加以利用。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种严谨的态度处理刚体运动和摩擦力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。