详细解答

STEP I 样本试卷，第 10 题

力学 • 功率与阻力

STEP I 样本试卷，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

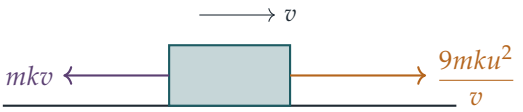
step.maths.org/questions/spec-s1-q10

关键思路

功率（power）等于力乘以速率，所以以恒定功率 P 运作的机车，其牵引力（driving force）为 P/v。由牛顿第二定律（Newton's second law）便得到一条关于 v 的一阶微分方程（first-order differential equation），而且可以分离变量（separation of variables）。关键在于选对加速度的形式：题目问时间时用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，问距离时用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。

解答

把机车看成一个质量为 m 的质点（particle），在水平路轨上行驶，因此它的重量与法向反作用力（normal reaction）互相抵消，只需考虑水平方向的力。取运动方向为正。



最大速率

速率为 v 时，牵引力为 $9mku^2/v$，所以由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

当 $v < 3u$ 时，右边为正，所以机车会加速。只有在牵引力与阻力（resistance）平衡，即 $9u^2 = v^2$ 时，它才会停止加速。因此可能达到的最大速率为

$$v_{\max} = 3u.$$

想一想 只要 $v < 3u$，机车就一直在加速，那为甚么它到不了 $3u$？

当 $v \to 3u$ 时，加速度会减小至零。分离变量后，由速率 v_1 加速至速率 v_2 所需的时间为

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

而当 $v_2 \to 3u$ 时，这个时间趋向无限大。所以 $3u$ 是终端速率（terminal speed）：机车的速率可以任意接近它，却永远不会在有限时间内真正达到它。（换个说法，$v = 3u$ 是这条微分方程的一个平衡点（equilibrium），而根据解的唯一性（uniqueness of solutions），从它下方出发的解不可能到达它。）

由 u 到 $2u$

在上面的公式中代入 $v_1 = u$ 和 $v_2 = 2u$：

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

正是所求。

切断动力

现在只剩下两个阻力 mkv 和 mkB，两者都与运动方向相反。我们要求的是距离，所以把加速度写成 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$：

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

写成 $\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$，然后积分，其中 v 由 $2u$ 下降至 0，而 x 由 0 增加至 D：

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v+B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v+B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u+B}{B}\right). \end{aligned}$$

所以切断动力后行驶的距离为

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1 + \frac{2u}{B}\right)\right].$$

这一次机车确实会在有限时间内停下：$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \le -kB < 0$，所以减速度（deceleration）永远不会小于 kB。这正是需要额外加上一个恒定阻力的原因。

验算

- 当 $B \to 0$ 时，$B\ln(1+2u/B) \to 0$，所以 $D \to 2u/k$。这与只有阻力 mkv 的情况吻合：此时 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$，即 v 随距离以 k 的速率线性下降。
- $D > 0$，因为当 $y > 0$ 时 $\ln(1+y) < y$，由此得 $B\ln(1+2u/B) < 2u$。而且 D 随 B 增大而减小，合乎预期。
- 数值上，取 $k = u = B = 1$，把运动方程逐步推算，得出停止距离为 0.90139，与 $2 - \ln 3 \approx 0.90139$ 吻合。由 $v = 1$ 起，把有动力的阶段逐步推算至时间 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$，最后得 $v = 2.0000$。

常见错误

- 把牵引力当作常数。在恒定功率下，牵引力是 P/v，会随机车加速而减小。
- 在最后一部分使用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。这样求得的是停止所需的时间，而不是距离。
- 声称机车“最终”会达到 $3u$。时间积分是发散（diverge）的，所以它永远达不到。

STEP 之外

速率 $3u$ 是自治方程（autonomous equation）$\dot{v} = f(v)$ 的一个稳定平衡点（stable equilibrium）。解会以指数方式趋近它，却永远不会与它相遇，因为性质良好的微分方程的解不可能相交或合并。这让你初次领略唯一性定理（uniqueness theorem）和相线分析（phase-line analysis），两者都是大学微分方程入门课程的内容。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）对这两者都有讲解。想进一步了解功率和阻力，可参考 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。