详细解答

STEP I 样本试卷，第 1 题

纯数学 · 判别式与部分分式

STEP I 样本试卷，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s1-q1

关键思路

在第 (i) 部分，对每个固定的 x，方程都是 y 的二次方程（quadratic equation），而只有当判别式（discriminant）非负时，才存在实数 y；这个条件正好就是对 x 的限制。把两者的角色对调，方程同样是 x 的二次方程，由此得出对 y 的限制。第 (ii) 部分是一道标准的部分分式（partial fractions）题目：把分式拆成若干项，而每一项的二项展开式（binomial expansion）都是我们已知的，然后把 x^n 的系数相加。

解答

第 (i) 部分

把方程看成 y 的二次方程，其系数取决于 x：

$$y^2 + 16xy + (4x^2 + 24x) = 0.$$

对于给定的实数 x，存在实数 y 满足此方程，当且仅当判别式非负：

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

乘积 $x(5x-2)$ 非负，正好是在两个因子同号（或其中一个为零）的时候，即 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{5}$。因此任何实数解都满足

$$x \leq 0 \quad \text{或} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

这正是所要证明的。

现在把方程看成 x 的二次方程：

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

存在实数 x，当且仅当

$$\begin{aligned}(16y + 24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y + 6)(y + 2) \geq 0.\end{aligned}$$

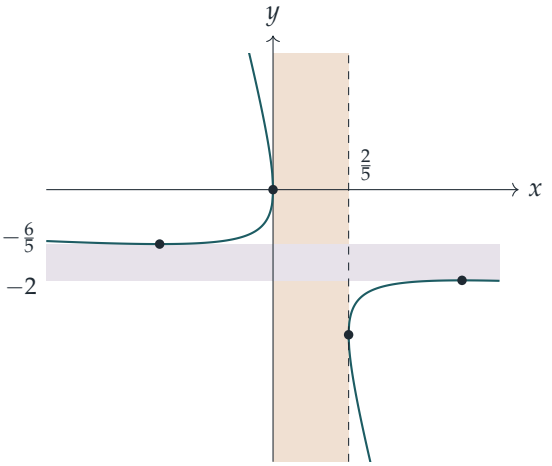
$(5y + 6)(y + 2)$ 的根是 $y = -2$ 和 $y = -\frac{6}{5}$，而这个二次式只在两根之间取负值。因此

$$y \leq -2 \quad \text{或} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

想一想 这些限制是否已是最佳的？真正的取值范围会不会更小？

这些限制是精确的。判别式的论证是“当且仅当”的关系：每一个满足 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{5}$ 的 x 都至少对应一个实数 y，对 y 亦然。边界值同样可以取到，由重根（double root）给出：对于 x 的界限，是 $(x, y) = (0, 0)$ 和 $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$；对于 y 的界限，是 $(1, -2)$ 和 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$。你可以验证每一点都满足原方程。

从几何上看，这条曲线是双曲线（hyperbola）（因为 $16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$），而被排除的两条带状区域就是它两支之间的空隙。



第 (ii) 部分

设

$$\frac{9}{(2 - x)^2(1 + x)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{2 - x} + \frac{C}{(2 - x)^2},$$

于是 $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$。代入 $x=-1$ 得 $9 = 9A$，故 $A=1$；代入 $x=2$ 得 $9 = 3C$，故 $C=3$；代入 $x=0$ 得 $9 = 4A + 2B + C = 7 + 2B$，故 $B=1$。因此

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

现在把每一项展开，先抽出因子 2，使二项级数（binomial series）以 $\frac{x}{2}$ 的幂表示：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad |x| < 2,$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, \qquad |x| < 2,$$

其中用到当 $|u| < 1$ 时 $(1-u)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$。相加后，$x^n$ 的系数是

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

三个级数同时收敛（converge），正好是在 $|x| < 1$ 的时候（第一个需要 $|x| < 1$，其余两个只需要 $|x| < 2$）。当 $1 \leq |x| < 2$ 时，后两个级数仍然收敛，但第一个不收敛，所以它们的和也不可能收敛。因此展开式成立的范围是

$$-1 < x < 1.$$

验算

在第 (i) 部分，点 $(1,-2)$ 给出 $4 - 32 + 4 + 24 = 0$，而 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$ 给出 $\frac{36}{25} + \frac{288}{25} + \frac{36}{25} - \frac{360}{25} = 0$，确认 y 的两个界限都可以取到。在第 (ii) 部分，$n=0$ 给出 $1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$，与 $x=0$ 时的 $\frac{9}{4\cdot 1}$ 吻合；而 $n=1$ 给出 $-1 + \frac{8}{8} = 0$，这是正确的，因为分母 $(2-x)^2(1+x) = 4 - 3x^2 + x^3$ 没有 x 项。从数值上看，在 $x = 0.9$ 处把级数求和得 $3.914745\ldots$，与 $9/(1.1^2 \times 1.9)$ 一致。

常见错误

- 把不等号的方向弄反，答成 $-2 \leq y \leq -\frac{6}{5}$。判别式在两根之间为负，所以被排除的正是这个区间（而且 $(0,0)$ 在曲线上，其 $y = 0$ 位于该区间之外）。
- 把 $(2-x)^{-1}$ 当作 $(1-x)^{-1}$ 来展开，忘记抽出因子 $\frac{1}{2}$（平方项则是 $\frac{1}{4}$）。
- 把成立范围写成 $|x| < 2$：展开式只在每一项都收敛的地方才成立，所以是 $|x| < 1$。

STEP 之外

第 (i) 部分的曲线是一条圆锥曲线（conic），它是椭圆、抛物线还是双曲线，取决于其二次项 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的 $b^2 - 4ac$ 的正负号。在大学里，这会通过二次型（quadratic form）的对称矩阵（symmetric matrix）及其特征值（eigenvalue）来理解。第 (ii) 部分触及收敛半径（radius of convergence）的概念：展开式一直成立到函数趋向无穷大的最近一点为止，在这里就是 $x = -1$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲述二次型，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析导论）则讲述幂级数（power series）及其收敛性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。