详细解答

STEP III 1999，第 9 题

力学 • 牛顿壳层定理

> **STEP III 1999，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q9

本题在 *Beyond STEP* 第 10.7 节球壳内的引力中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/shell-theorem.html

关键思路

一个有大小的物体所产生的引力（gravity），是它各个小部分的引力的向量和（vector sum）。对圆环而言，对称性（symmetry）已经完成了大部分工作：圆环上位置相对的两小段，其横向的拉力互相抵销，而且每一小段与质点（particle）的距离都相同，所以最后只剩下一个简单的分量（component）。对球壳（shell）而言，我们把它切成许多圆环，使这些圆环的轴都通过质点，再对每一片应用圆环的结果，然后用积分把各片加起来。只要选对代换（substitution），这个积分便会化为零。

解答

圆环

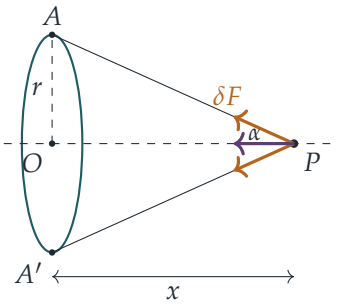
把圆环看成一个质量为 m 的均匀细圆，并把质点看成位于 P 的单位质量的点，它在轴上，与圆心 O 的距离为 x。圆环上每一点与 P 的距离都相同，同为

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

这可由 P、O 和该点所组成的直角三角形，用毕氏定理（Pythagoras' theorem）得出。

方向。把圆环上位于 A 的每一小段，与位于直径另一端 A' 的相等小段配成一对。它们与 P 的距离同为 d，所以它们分别沿 PA 和 PA' 施加大小相等的拉力。这两条直线关于轴互为反射，所以垂直于轴的分量互相抵销，而沿轴的分量则相加，两者都由 P 指向 O。

整个圆环正是由这样的一对对小段组成，所以质点所受的合力沿着轴，指向圆环的中心。



大小。质量为 δm 的一小段，以大小为 $G\,\delta m/d^2$ 的力沿 PA 拉动质点。设 α 为 PA 与轴 PO 之间的夹角，则 $\cos\alpha = x/d$，所以这个力指向 O 的分量为

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

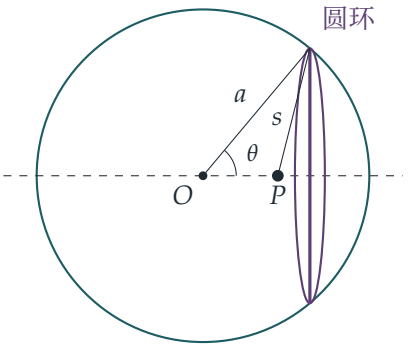
与 δm 相乘的因子对每一小段都相同，所以对整个圆环求和，只需把 δm 换成 m：

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

方向指向圆心，正如题目所求。如果 P 在圆环的另一侧，只要把 x 换成 $|x|$，结果仍然成立；在下一部分，我们会把 x 当作有向距离（signed distance）使用，这时代入带正负号的 x，公式便正确地给出力的有向分量。

球壳

设球壳的中心为 O，半径为 a，质量为 M，则它的面密度（surface density）为 $M/(4\pi a^2)$。把质点放在 P，其中 $OP = b < a$。若 $b = 0$，从 O 出发的每个方向都没有分别，球壳上位置相对的点的拉力互相抵销，所以力为零。以下取 $0 < b < a$，并以直线 OP 为轴，由 O 起沿指向 P 的方向量度距离。



用垂直于 OP 的平面把球壳切成许多薄圆环。位于极角（polar angle）θ 与 $\theta+\delta\theta$ 之间的圆环（极角在 O 处由 OP 方向起量度），半径为 $a\sin\theta$，圆心位于轴上 $a\cos\theta$ 的位置，宽度为 $a\,\delta\theta$。它的质量是

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2}M\sin\theta\,\delta\theta.$$

这个圆环的圆心与 P 的有向距离为 $a\cos\theta-b$。根据圆环的结果，它对 P 的拉力沿着轴，而这个拉力在正方向（背离 O、穿过 P 的方向）上的分量为

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{\big((a\cos\theta-b)^2+a^2\sin^2\theta\big)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

这个正负号的约定在两种情况下都正确：当 $a\cos\theta>b$ 时，圆环在 P 的外侧，拉力指向正方向；当 $a\cos\theta<b$ 时，拉力指向相反方向。每个圆环的拉力都沿着同一条轴，所以总力沿着 OP，其分量为

$$F = \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a\cos\theta-b)\sin\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

想一想 用甚么代换可以驯服这个分母?

根据余弦定理（cosine rule），$a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 这个量正是 s 的平方，即 P 到圆环的距离的平方（图中标示为 s 的线段）。因此我们作代换

$$s^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

当 θ 由 0 变到 π 时，s 由 $a-b$ 递增至 $a+b$（由于 $b<a$，前者为正数）。此外，

$$a\cos\theta-b = \frac{a^2+b^2-s^2}{2b}-b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}.$$

利用 $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$，

$$\begin{aligned}F &= \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s\\ &= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}.\end{aligned}$$

在 $s=a+b$ 时，方括号内的值是 $-(a-b)-(a+b)=-2a$；在 $s=a-b$ 时，它是 $-(a+b)-(a-b)=-2a$。两者相等，所以

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

力沿着 OP，而它沿 OP 的分量为零，所以质点不受球壳的任何引力，正如题目所求。

验算

- 圆环：在 $x = 0$ 时力为零（质点位于圆心，各方的拉力互相平衡）；而当 $x \gg r$ 时，力趋向 Gm/x^2，就像全部质量都集中在 O 一样。
- 球壳，质点在外：如果改为 $b > a$，积分下限变成 $s = b - a$，方括号在该处的值是 $(a+b) - (b-a) = 2a$。于是 $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$：这是一个指向 O 的吸引力，就像全部质量都集中在中心一样。这正是牛顿（Newton）的另一条球壳定理（shell theorem），可见积分应该没有算错。
- 数值验证：把 2000 个点质量沿圆环排列再求和，结果与公式吻合至小数点后十位。对 θ 的积分使用辛普森法则（Simpson's rule），在随机选取的几个 $b < a$ 下，所得的值约为 10^{-15}；另外用蒙地卡罗方法（Monte Carlo）在球壳上随机取 2×10^5 个点，取 $a = 2$、$b = 1.3$、$GM = 1$，所得的力小于 10^{-3}，而典型的量级是 $GM/a^2 = 0.25$。

常见错误

- 把圆环的质量元素取为 $M\,\delta\theta/\pi$。靠近 $\theta = \pi/2$ 的圆环较大，所以质量与 $\sin\theta\,\delta\theta$ 成正比，而不是与 $\delta\theta$ 成正比。
- 在圆环公式中使用 $|a\cos\theta - b|$。位于 P 两侧的圆环，拉力方向相反，而这种抵销正是整个问题的关键。
- 弄错 s 的上下限：在 $\theta = 0$ 时，距离是 $a - b$ 而不是 $b - a$，因为 P 在球壳之内。

STEP 之外

这就是牛顿的球壳定理，而利用引力的高斯定律（Gauss's law），它有一个更简洁的证明：引力场穿过任何闭曲面的通量（flux），与曲面内的质量成正比，所以根据对称性，空心球壳内部的引力场必定为零。同样的数学也可以给出势（potential），而球壳内部的势是常数这一事实，正是调和函数（harmonic function）的一个早期例子；调和函数是大学一年级向量微积分（vector calculus）的研习内容。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对球壳定理和引力势有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。