详细解答

STEP III 1999，第 8 题

纯数学 · 分段微分方程

STEP III 1999，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q8

关键思路

在每个区间上，方程都是频率固定的简谐运动（simple harmonic motion），所以该区间上的通解（general solution）是 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 的组合。唯一要做的工夫是衔接：连续性条件（continuity conditions）把上一个区间末端的 y 和 y' 的值，交给下一个区间作为起始值。各区间的长度都是 2π，结果每次的起始值都相同，于是出现一个规律，我们可以用归纳法（induction）加以证明。

解答

第 (i) 部分

当 $0 < x < 2\pi$ 时，$n = 1$，所以 $y'' + y = 0$，其通解为

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

由于 y 和 y' 在 $x = 0$ 连续，条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 1$ 适用于这个解：$y(0) = A = 0$ 及 $y'(0) = B = 1$。因此

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

在右端，$y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$ 及 $y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$。

第 (ii) 部分

当 $2\pi < x < 4\pi$ 时，$n = 2$，所以 $y'' + 4y = 0$，且

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

由 y 和 y' 在 $x = 2\pi$ 的连续性，这个解在该处必须满足 $y = 0$ 和 $y' = 1$，即第 (i) 部分末尾求得的值。由于 $\cos 4\pi = 1$ 及 $\sin 4\pi = 0$，

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

所以 $B = \frac{1}{2}$，而当 $2\pi \le x \le 4\pi$ 时 $y = \frac{1}{2}\sin 2x$，正如题目所求。

留意这里同样有 $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$ 及 $y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$：下一个区间的起始值完全一样。由此可提出以下断言。

断言。对每个正整数 n，

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{对于} 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

用归纳法证明。$n = 1$ 的情况就是第 (i) 部分。假设断言对 $n = k$ 成立。在 $x = 2k\pi$ 处，前一段给出

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

因为 $2k^2\pi$ 是 2π 的整数倍。在 $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ 上，方程为 $y'' + (k+1)^2 y = 0$，所以

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

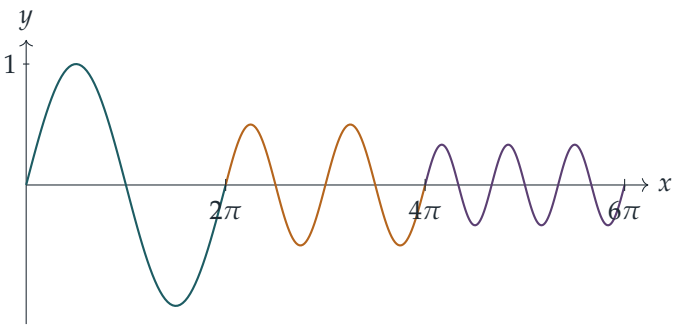
? **想一想** 在左端 $x = 2k\pi$ 处，$\cos(k+1)x$ 和 $\sin(k+1)x$ 的值是多少?

在该处 $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$，同样是 2π 的整数倍，所以余弦值是 1，正弦值是 0。因此由 y 和 y' 在 $x = 2k\pi$ 的连续性可得

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

所以在 $2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$ 上 $y = \dfrac{1}{k+1}\sin(k+1)x$。这正是 $n = k+1$ 时的断言，故由归纳法，断言对所有 $n \ge 1$ 成立。 □

所以只要 $2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$，就有 $y(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$。（在每个接合点 $x = 2n\pi$，相邻两条公式都给出 $y = 0$，所以并无歧义。）



第 (iii) 部分

利用第 (ii) 部分，在第 n 个区间上

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

因为 $\sin 2nx$ 在上下限处都等于零（每个积分限都是 π 的倍数，而 $2n$ 是整数），所以余弦项的积分为零。

把首 N 个区间加起来，

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

这个无穷积分（infinite integral）就是 $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$ 当 $X\to\infty$ 时的极限。由于 $y^2\ge 0$，它是 X 的递增函数；而当 $2(N-1)\pi \le X \le 2N\pi$ 时，它介乎在 $2(N-1)\pi$ 与 $2N\pi$ 处的值之间。由于级数收敛（converges），当 $N\to\infty$ 时这两个值都趋向 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。因此

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

正如题目所求。

验算

- 每一段 $\frac{1}{n}\sin nx$ 都满足 $y''=-n^2y$，起点处 $y=0$、$y'=1$，终点处亦是 $y=0$、$y'=1$，所以各段在函数值和斜率上都平滑地接合。
- 以数值方法（四阶龙格—库塔法，fourth-order Runge–Kutta）逐步求解这条微分方程（differential equation），走过首六个区间，所得结果与 $\frac{1}{n}\sin nx$ 相差不超过 10^{-10}，而 y^2 由起点至 12π 的积分算得 4.685336，与 $\pi(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{36})$ 吻合。
- 利用欧拉（Euler）的结果 $\sum 1/n^2=\pi^2/6$，这个积分等于 $\pi^3/6\approx 5.168$。

常见错误

- 在每个区间上都把初始条件（initial conditions）用于 $x=0$，而不是用于该区间的左端 $x=2(n-1)\pi$。这样做在本题碰巧得出正确答案，只因为起点是 2π 的倍数，而这一点必须写明。
- 忘记 $y'=nB\cos nx$：正是因子 n 产生了振幅（amplitude）$\frac{1}{n}$。
- 把积分写成无穷级数之和，却没有说明极限为何存在；y^2 非负，令这一步很容易说明。

STEP 之外

这是系数为分段常数（piecewise-constant）的微分方程的一个简单例子，这类方程可用来描述一个劲度在固定时刻切换的弹簧；在每次切换时，即使 y'' 出现跳跃，解仍然连续且可微。最后的答案 $\pi^3/6$ 把一条微分方程与巴塞尔和（Basel sum）$\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 联系起来；在大学本科的傅里叶级数（Fourier series）课程中，这个和通常最先是用帕塞瓦尔定理（Parseval's theorem）证明的。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）同时涵盖二阶线性方程和傅里叶级数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。