详细解答

STEP III 1999，第 7 题

纯数学 · 群与同构

STEP III 1999，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q7

关键思路

表达式 $x+y+axy$ 几乎就是一个乘积。乘以 a 再加上 1，可得

$$1+a(x*y)=1+ax+ay+a^2xy=(1+ax)(1+ay),$$

所以在变量代换（change of variable）$X=1+ax$ 之下，运算 $*$ 其实只是乔装了的普通乘法。群（group）的每一项性质，都可由乘法的相应性质得出，而我们必须剔除的那个数，正是对应于 $X=0$ 的那一个。

解答

以下一律记 $\phi(x)=1+ax$。由于 $a\neq 0$，ϕ 是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射（bijection），所以两个实数 u,v 相等，当且仅当 $\phi(u)=\phi(v)$。上面的恒等式可写成

$$\phi(x*y)=\phi(x)\,\phi(y)\qquad \text{对所有实数}x,y. \tag{†}$$

结合律

在等式两边各用 (†) 两次，

$$\phi((x*y)*z)=\phi(x*y)\,\phi(z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi(x*(y*z))=\phi(x)\,\phi(y*z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

由于实数乘法符合结合律（associativity），这两式相等；又因为 ϕ 是一对一（one-to-one）的，所以 $(x*y)*z=x*(y*z)$。因此 $*$ 符合结合律。

（如果你想直接验证：$(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 展开后都是对称的表达式 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$。）

群

想一想 要剔除的是哪一个数？为甚么不能保留整个 $\mathbb{R}$？

在 ϕ 之下，$x = -\frac{1}{a}$ 这个数对应于 $\phi(x) = 0$，而 0 没有乘法逆元（multiplicative inverse）。具体来说，对任何实数 y，

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right) * y = -\tfrac{1}{a} + y - y = -\tfrac{1}{a},$$

所以 $-\frac{1}{a}$ 会把一切都吸收掉，无论与甚么元素结合，都不可能得出单位元（identity）。因此我们取

$$G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

这正是所有满足 $\phi(x) \neq 0$ 的 x 所组成的集合。我们逐一验证四条公理。

封闭性（*closure*）。若 $x, y \in G$，则 $\phi(x) \neq 0$ 且 $\phi(y) \neq 0$，所以由 (†) 得 $\phi(x * y) = \phi(x)\phi(y) \neq 0$。故此 $x * y \neq -\frac{1}{a}$，而 $x * y$ 当然是实数，所以 $x * y \in G$。

结合律。上面已对所有实数证明了这一点，所以对 G 的元素自然也成立。

单位元。对每个 x，都有 $x * 0 = x + 0 + 0 = x$ 及 $0 * x = x$，而且因为 $\phi(0) = 1 \neq 0$，所以 $0 \in G$。因此 0 是单位元。（这与 $\phi(0) = 1$ 吻合，即对应乘法的单位元。）

逆元（*inverse*）。给定 $x \in G$，我们要找 y 使得 $x * y = 0$，即 $x + y(1 + ax) = 0$。由于 $1 + ax \neq 0$，可以相除，得出

$$x^{-1} = \frac{-x}{1 + ax}.$$

这个数属于 G，因为

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right) = 1 - \frac{ax}{1+ax} = \frac{1}{1+ax} \neq 0,$$

而且由于 $*$ 是可交换（commutative）的（从公式明显可见 $x * y = y * x$），所以同样有 $x^{-1} * x = 0$。

四条公理全部成立，所以 $(G, *)$ 是一个群（事实上是阿贝尔群（abelian group））；其中被剔除的数是 $-\frac{1}{a}$。

2 阶子群

非零实数的乘法群有子群（subgroup）$\{1, -1\}$。把它经 ϕ 拉回来：$\phi(x) = 1$ 给出 $x = 0$，而 $\phi(x) = -1$ 给出 $x = -\frac{2}{a}$。所以我们尝试

$$H = \left\{0, -\tfrac{2}{a}\right\}.$$

这是 G 中两个不同的元素（因为 $a \neq 0$，$-\frac{2}{a} \neq 0$ 且 $-\frac{2}{a} \neq -\frac{1}{a}$）。直接计算，

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right) * \left(-\tfrac{2}{a}\right) = -\tfrac{4}{a} + a \cdot \tfrac{4}{a^2} = 0,$$

以及 $0*0=0$，$0*\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2}{a}$。所以 H 是封闭的，包含单位元，而且每个元素都是自己的逆元。因此 H 是 $(G,*)$ 的子群，恰好有两个元素。

事实上这是唯一的一个：阶（order）为 2 的群必是 $\{e,h\}$，其中 $h*h=e$ 且 $h\neq e$；而 $h*h=0$ 即 $h(2+ah)=0$，所以 $h=-\frac{2}{a}$。

验算

取 $a=1$。这时 $x*y=x+y+xy=(1+x)(1+y)-1$，被剔除的数是 -1，而 2 阶子群是 $\{0,-2\}$：的确 $(-2)*(-2)=-4+4=0$。此外 $2*3=11$，而 $(1+2)(1+3)=12=1+11$，与 (†) 所预期的一致。我们也用电脑以精确的有理数运算，对约 5000 组随机选取的 a,x,y,z 验证了恒等式 (†)、结合律、G 的封闭性、单位元 0、逆元公式，以及 $\{0,-\frac{2}{a}\}$ 的封闭性。

常见错误

- 忘记验证逆元 $\frac{-x}{1+ax}$ 本身属于 G，或忘记验证 $x*y$ 永远不会等于被剔除的那个数。正是封闭性这条公理，说明了为何要剔除的恰好是一个点。
- 以 $\{0\}$ 或 $\{0,-\frac{1}{a}\}$ 作为所求的子群：前者只有一个元素，而 $-\frac{1}{a}$ 根本不在 G 之中。

STEP 之外

映射 $\phi(x)=1+ax$ 是由 $(G,*)$ 到群 $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ 的同构（*isomorphism*）：即一个把其中一种运算变成另一种运算的双射。一旦找到同构，所有结构上的事实都可以不费吹灰之力地搬过去，这就是为甚么 $(G,*)$ 恰好只有一个 2 阶元素，正如 $\times$ 之下只有 -1 一样。同构，以及两个群可以外表不同却“相同”这个想法，是抽象代数（abstract algebra）入门课程的核心；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是阅读这方面内容的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。