详细解答

STEP III 1999，第 6 题

纯数学 · 参数曲线与面积

STEP III 1999，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q6

关键思路

方程其实是说 $(x^{1/n})^2+(y^{1/n})^2=(a^{1/n})^2$，这是一个乔装了的圆。所以，像处理圆那样，设 $x^{1/n}=a^{1/n}\cos t$ 及 $y^{1/n}=a^{1/n}\sin t$，然后取 n 次方。正因为 n 是奇数，我们才可以取负数的实 n 次方根，所以曲线遍布全部四个象限。

解答

参数化

因为 n 是奇数，每个实数 x 都恰好有一个实 n 次方根 $x^{1/n}$，其正负号与 x 相同，而 $x^{2/n}$ 的意思就是 $(x^{1/n})^2$。设 $X=x^{1/n}$、$Y=y^{1/n}$ 及 $R=a^{1/n}>0$，方程 $(*)$ 变成

$$X^2+Y^2=R^2,$$

这是一个半径为 R 的圆，我们以 $X=R\cos t$、$Y=R\sin t$ 把它参数化（parametrise）。取 n 次方（由于 n 是奇数，这是 $\mathbb{R}$ 上的一个双射（bijection））便得

$$\boxed{x=a\cos^n t,\qquad y=a\sin^n t,\qquad 0\le t\le 2\pi.}$$

曲线上每一点都可以这样得出，因为圆上每一点 (X,Y) 都可以这样得出。

? **想一想** 为甚么这是逆时针方向，而不仅仅是“某种”绕行曲线的方式?

映射 $(X,Y)\mapsto(X^n,Y^n)$ 保持每个坐标的正负号不变，所以它把每个象限映到自身。当 t 由 0 增至 2π 时，点 $(R\cos t,R\sin t)$ 沿逆时针方向绕圆一周，依次经过正 x 轴、第一象限、正 y 轴、第二象限，如此类推。它的像 (x,y) 以相同的次序经过相同的轴和象限，所

以也是沿逆时针方向绕原点一周。（例如在第一象限内，$x = a\cos^n t$ 由 a 递减至 0，而 $y = a\sin^n t$ 则由 0 递增至 a。）当 $n = 1$ 时，这就是我们熟悉的圆 $x = a\cos t$、$y = a\sin t$。

$n = 3$ 时的草图

现在 $x = a\cos^3 t$、$y = a\sin^3 t$，而曲线是 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$。

对称性。方程在 $x \mapsto -x$、$y \mapsto -y$ 以及 x 与 y 互换之下都保持不变。所以曲线对两条坐标轴以及直线 $y = \pm x$ 都对称，我们只需研究第一象限，即 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$。

截距。当 $t = 0$ 时，我们位于 $(a, 0)$；当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时，位于 $(0, a)$。根据对称性，曲线只在 $(\pm a, 0)$ 和 $(0, \pm a)$ 与坐标轴相交。在直线 $y = x$ 上（即 $t = \frac{\pi}{4}$ 时），我们位于 $(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}})$，沿每条轴的方向只走了约 $0.35a$。

斜率。我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

所以当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t.$$

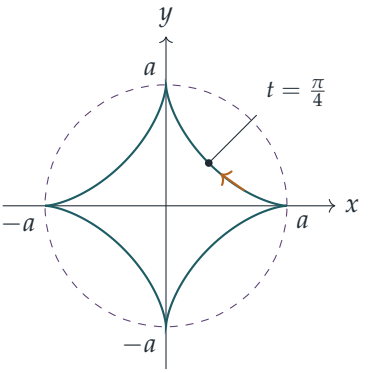
当 $t \to 0$ 时，这个值趋向 0；当 $t \to \frac{\pi}{2}$ 时，它趋向 $-\infty$。所以曲线到达 $(a, 0)$ 时与 x 轴相切，到达 $(0, a)$ 时与 y 轴相切。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 在 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 时都等于零。第一象限的弧与由第四象限反射而来的弧在 $(a, 0)$ 相遇，而且两者在该处都与 x 轴相切，所以两段弧会合成一个尖点。曲线在 $(\pm a, 0)$、$(0, \pm a)$ 这四点有尖点（cusp）。

凹凸性。把 $-\tan t$ 对 x 求导，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0 \quad \text{当} 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

所以第一象限的弧是凸（convex）的：它向原点弯入，而不像圆那样向外弯。它位于其弦 $x + y = a$ 的下方。事实上 $\cos^3 t + \sin^3 t \le \cos^2 t + \sin^2 t = 1$，等号只在尖点成立。

综合以上各点，便得到一个四角星形（星形线（astroid））。下图画出这条曲线，并以虚线画出半径为 a 的圆作比较。



$n = 3$ 时的面积

利用上面的导数，

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

由于 $\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)$，而 $\cos 4t$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的积分为零，

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

因此

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

公式给出正的面积，是因为曲线是沿逆时针方向绕行的，这正是第一部分中方向之所以重要的原因。

验算

- 星形线位于菱形 $|x| + |y| \le a$ 之内，而这个菱形的面积是 $2a^2$，所以答案必定小于 $2a^2$。果然 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$。
- 作为一个不用该公式的验算，取 $a = 1$，以数值方法计算 $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$，得 $1.178097\ldots$，与 $3\pi/8 = 1.1780972\ldots$ 吻合。
- 当 $n = 1$ 时，同样的方法给出 $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$ 及 $A = \pi a^2$，即圆的面积，正如所料。

常见错误

- 写下 $x = a\cos^n t$ 却没有解释为甚么 x 可以是负数。正是因为 n 是奇数，$x^{2/n}$ 在 $x < 0$ 时才有意义（参数化也才是完整的）。
- 把曲线画成像压扁了的圆那样向外鼓出。二阶导数显示它是向内弯的，并在坐标轴上有尖点。
- 只在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上积分而忘记乘以 4，或在 $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 一项弄错正负号（两项最终都是正的）。

STEP 之外

这条面积公式是格林定理（Green's theorem）的特殊情况；格林定理把一个区域上的积分转化为沿其边界的积分。它也是求积仪（planimeter）背后的原理，求积仪是一种沿边界描画便能量度面积的机械仪器。像 $|x|^p + |y|^p = 1$ 这类曲线，也给出 ℓ^p 范数（norm）的“单位圆”，你会在分析和线性代数中遇到它们；星形线是 $p = \frac{2}{3}$ 的情况，它不是凸的，所以并不给出一个范数。星形线也是一个圆在半径为其四倍的圆内滚动时，圆上一点所描出的轨迹。想看更多同类型的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。