详细解答

STEP III 1999，第 5 题

纯数学 · 斐波那契恒等式与数学归纳法

STEP III 1999，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q5

关键思路

这其实是斐波那契数列（Fibonacci sequence），只是下标移了一位，使得 $u_n = F_{n+1}$。要证第一个恒等式（identity），可把 u_{n+2} 和 u_{n-1} 都用中间的一对 u_{n+1}、u_n 表示：交叉项随即互相抵消。至于倍增公式（doubling formulae），应以归纳法（induction）把两个命题一并证明，因为两者通过递推关系（recurrence）互相支援。第一个恒等式正是完成奇数情况所需的工具。

解答

第一个恒等式

固定 $n \geq 1$，使得 u_{n-1}、u_n、u_{n+1}、u_{n+2} 全部有定义。由递推关系可得

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad 及 \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

其中第二式来自 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$。两式分别平方后相加，

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= (u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2) \\ &= 2(u_{n+1}^2 + u_n^2), \end{aligned}$$

这就是所求的恒等式。

倍增公式

以 $P(n)$ 表示以下两式同时成立的命题：

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad 及 \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

数列的首几项为 $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$。

基础情况。当 $n = 1$ 时：$u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$，而 $u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$。所以 $P(1)$ 成立。

> **想一想** 为甚么要把两条公式一并证明，而不是逐条证明?

要由递推关系求得 u_{2n+2}，我们需要 u_{2n+1} 和 u_{2n}，所以 $n+1$ 时的偶数项公式需要用到 n 时的两条公式。其后 $n+1$ 时的奇数项公式又需要用到 $n+1$ 时的偶数项公式。两个命题都无法单独向前推进。

归纳步骤。假设 $P(n)$ 对某个 $n \geq 1$ 成立。

偶数项。先用递推关系，再用 $P(n)$，

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

这就是把 n 换成 $n+1$ 后的偶数项公式。

奇数项。利用递推关系、刚证得的一式以及 $P(n)$，

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

我们希望这等于 $u_{n+2}^2 - u_n^2$，而第一个恒等式正好在这里派上用场。由于 $n \geq 1$，该恒等式给出 $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$，所以

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

这就是把 n 换成 $n+1$ 后的奇数项公式，因为 $2(n+1)+1 = 2n+3$，而 $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$。

因此 $P(n)$ 蕴涵 $P(n+1)$。连同基础情况，由归纳法可知 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。

验算

试取 $n = 5$: $u_{10} = 89$, 而 $u_5^2 + u_4^2 = 64 + 25 = 89$; $u_{11} = 144$, 而 $u_6^2 - u_4^2 = 169 - 25 = 144$。我们以精确的整数运算,对所有 $n \leq 299$ 验证了第一个恒等式,并对所有 $n \leq 189$ 验证了两条倍增公式。另外留意 $u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_{n+1} + u_{n-1})$, 这是奇数项另一个方便好用的形式。

常见错误

- 只对偶数项公式作归纳：归纳步骤需要 u_{2n+1}，于是无法继续。
- 在 $n = 0$ 时使用第一个恒等式，但此时 u_{-1} 并无定义。在归纳步骤中，我们只在 $n \geq 1$ 时使用它。
- 忘记这里的下标与惯常的斐波那契数相比移了一位（$u_0 = u_1 = 1$），以致用错误的数值验证基础情况。

STEP 之外

倍增公式让你只需大约 $\log_2 N$ 步便可算出 u_N，方法是把 N 反复减半：这就是“快速倍增”（fast doubling）法，与快速幂（fast exponentiation）算法一脉相承。它背后是矩阵恒等式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$，把这个矩阵平方，便可一次过得出两条公式。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）通过这个矩阵的幂和特征值（eigenvalues）来处理斐波那契数；而在 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（数论入门）中，讲连分数（continued fractions）的一章会再次遇上相邻斐波那契数之比，它们正是黄金比（golden ratio）的渐近分数（convergents）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。