详细解答

STEP III 1999，第 4 题

纯数学 · 欧拉公式与多面体

> **STEP III 1999，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 7.9 节只有五种柏拉图立体中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/platonic-solids.html

关键思路

用两种不同的方法数棱（edge）：一次逐个面（face）去数，一次逐个顶点（vertex）去数。每种数法都把 E 用 F（或 V）表示出来，代入欧拉公式（Euler's formula）后，便只剩下一条关于 F 的方程。之后整个分类只取决于一项观察：F 是正数，所以 h 必须是正数，于是只剩下寥寥几组整数对 (m, n)。

解答

推导 F 的公式

每个面都是 m 边形，所以有 m 条棱。逐个面去数它的棱，总数是 mF。但每条棱恰好是两个面之间的边界，所以这样数会把每条棱数了两次：

$$mF = 2E.$$

同样地，每个顶点有 n 条棱相交，所以逐个顶点去数棱，总数是 nV。每条棱恰好有两个端点，所以这样数也把每条棱数了两次：

$$nV = 2E.$$

因此 $E = \frac{1}{2}mF$，而 $V = \frac{2E}{n} = \frac{mF}{n}$。代入 $V - E + F = 2$ 得

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2$$
$$F(2m - mn + 2n) = 4n \qquad \text{（两边乘以 } 2n\text{）.}$$

现在把题目给出的 h 展开：

$$4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn,$$

这正好就是括号内的式子。所以 $Fh = 4n$。这里 F 和 n 都是正数，所以 $h \neq 0$，可以相除：

$$F = \frac{4n}{h}, \qquad h = 4 - (n-2)(m-2),$$

这就是所要证明的结果。

只有五种正多面体

> **想一想** 有哪些对 m 和 n 的限制是来自几何，而不是来自公式?

多边形最少有三条边，所以 $m \geq 3$。在立体的一个顶点处，最少要有三个面相交：只有两个面在一个角上相交，得到的只是一块扁平的折片，而不是立体的一个角。所以同样有 $n \geq 3$。于是 $m - 2 \geq 1$ 及 $n - 2 \geq 1$。

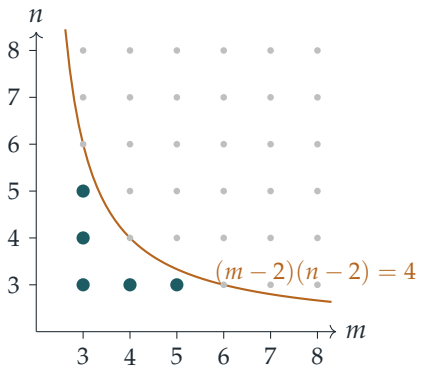
由于 $F > 0$ 及 $4n > 0$，公式迫使 $h > 0$，即

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

因此两个正整数 $m-2$ 与 $n-2$ 的积是 1、2 或 3，所以 $h = 3$、2 或 1。仅有的因数分解（factorisation）是

- $(m-2)(n-2) = 1$：$m = n = 3$，所以 $h = 3$；
- $(m-2)(n-2) = 2$：$(m,n) = (3,4)$ 或 $(4,3)$，所以 $h = 2$；
- $(m-2)(n-2) = 3$：$(m,n) = (3,5)$ 或 $(5,3)$，所以 $h = 1$。

下图显示的是同一回事：满足 $m, n \geq 3$ 并严格位于双曲线（hyperbola）$(m-2)(n-2) = 4$ 以内的格点（lattice point）。



对每一组数对，$F = 4n/h$、$E = \frac{1}{2}mF$ 及 $V = mF/n$：

	m	n	h	V	E	F
正四面体（tetrahedron）	3	3	3	4	6	4
正八面体（octahedron）	3	4	2	6	12	8
正方体（cube）	4	3	2	8	12	6
正二十面体（icosahedron）	3	5	1	12	30	20
正十二面体（dodecahedron）	5	3	1	20	30	12

例如，对正二十面体，$F = 4 \cdot 5/1 = 20$、$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$ 及 $V = 3 \cdot 20/5 = 12$。

所以 (m, n) 最多只有五种可能的组合。每一种都确实存在，表中列出的五种为人熟悉的柏拉图立体（Platonic solid）就是例证。所以正多面体（regular polyhedron）恰好有五种。

验算

- 每一行都满足 $V - E + F = 2$。对正十二面体，$20 - 30 + 12 = 2$。
- 正方体给出 $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$，你可以拿一粒骰子来数一数。
- 把 m 和 n 对调，V 和 F 便会对调，而 E 保持不变（正方体与正八面体、正十二面体与正二十面体）。这就是对偶性（duality）：在每个面的中心放一个顶点。
- 一项独立的验算：每个顶点的角亏（angle deficit）$2\pi - n\pi(m-2)/m$ 必须是正数，而全部 V 个顶点的角亏总和是 4π（笛卡儿定理，Descartes' theorem）。五种立体全都符合，而用电脑搜索 $3 \le m, n < 200$ 的范围，也找不到其他满足 $h > 0$ 的数对。

常见错误

- 数棱时忘记了因子 2：每条棱属于两个面，并有两个端点。
- 没有说明为甚么 $n \geq 3$。少了这个条件，$n = 2$ 时对每个 m 都有 $h = 4$，于是会出现无限多个“解”。
- 单凭数算就下结论说“恰好五种”。这个论证只说明最多有五种；你还需要实际的立体，才能说明每种情况都存在。

STEP 之外

欧拉公式是拓扑学（topology）的起点。无论用哪种方法把一个曲面分割成面，$V - E + F$ 这个数（即欧拉示性数（Euler characteristic））都是一样的，所以球面是 2，环面（torus）是 0，如此类推。在环面上重复这个论证，会得到无限多种“正则”的铺砌（tiling），例如正方形网格。这五种立体的对称群（symmetry group），也是群论（group theory）入门课程中的核心例子。想读一本生动有趣的介绍，可看 Richeson 的 *Euler's Gem*；Armstrong 的 *Basic Topology* 则把这些想法再推进一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。