详细解答

STEP III 1999，第 3 题

纯数学 · 黎曼和与极限

> **STEP III 1999，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

关键思路

算式 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$ 是竖立在 $[1,2]$ 上的 n 个阔度为 $\frac{1}{n}$ 的幼长矩形的总面积；矩形愈来愈幼时，它们便恰好填满曲线下的面积。另外两个极限（limit）其实是同一幅图画的变相：要做的就是抽出因子 $\frac{1}{n}$，再把每一项写成只含 m/n 的函数。

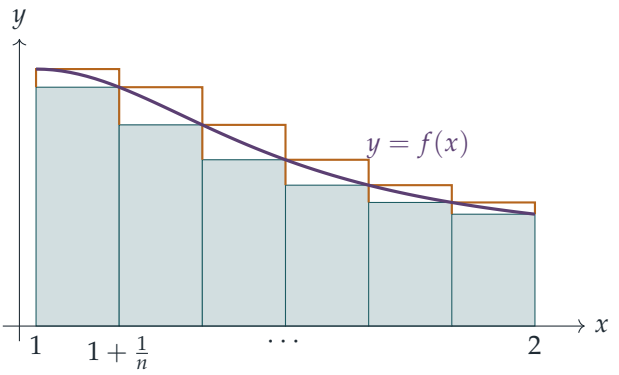
解答

极限公式

把 $[1,2]$ 分成 n 条阔度为 $\frac{1}{n}$ 的长条；第 m 条是 $[1+\frac{m-1}{n},\, 1+\frac{m}{n}]$。在这长条上竖立一个矩形，其高度取 f 在长条右端的值 $f(1+m/n)$。它的面积是 $\frac{1}{n}f(1+m/n)$，所以

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

就是这些矩形的总面积。



草图所示的是一个递减的 f。着色（蓝绿色）的矩形以右端的函数值为高，因此位于曲线之下；顶上的琥珀色梯级则显示改用左端的函数值为高时所得的矩形，它们位于曲线之上。因此

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{琥珀色部分的总面积}).$$

现在把所有琥珀色部分横向平移，叠成阔度为 $\frac{1}{n}$ 的单独一列：由于各段高度逐项相消（telescope），它们叠起来的总高度是 $f(1)-f(2)$。所以

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{当} n\to\infty,$$

于是 $S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。递增的 f 可用同样方法处理，只是不等号的方向相反；而任何合理的函数（例如连续而且分段单调（piecewise monotonic）的函数）都可以切成有限多个单调的部分，每部分所带来的误差都是 $\frac{1}{n}$ 的量级。这就说明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

极限 $\ln 2$

? **想一想** 怎样才能令 $\dfrac{1}{n+m}$ 看起来像 $\dfrac{1}{n}f(1+m/n)$?

从分母抽出因子 n：

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n}f(1+m/n) \qquad \text{其中} f(x)=\frac{1}{x}.$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}\\ &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2-\ln 1 = \ln 2,\end{aligned}$$

正如所求。（这里 f 是递减的，所以草图的论证完全适用；它甚至告诉我们，这个和介乎 $\ln 2 - \frac{1}{2n}$ 与 $\ln 2$ 之间。）

最后一个极限

第 m 项是 $\dfrac{n}{n^2+m^2}$，其中 $m = 1, \ldots, n$。把分子和分母同时除以 n^2：

$$\frac{n}{n^2+m^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

公式是在 $x = 1 + m/n$ 处计算 f 的值，要与它吻合，便需要 $f(x) = \dfrac{1}{1+(x-1)^2}$，因为这样就有 $f(1+m/n) = \dfrac{1}{1+(m/n)^2}$。这个 f 在 $[1,2]$ 上是递减的。因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{n^2+m^2} &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2} = \Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2 \\ &= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（另一个等价的做法是代入 $u = x - 1$，得出 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$。）

验算

这些和可以直接计算。取 $n = 1000$，第二个和是 0.69290，而 $\ln 2 \approx 0.69315$；第三个和是 0.78515，而 $\pi/4 \approx 0.78540$。两者的差距都约为 $\frac{1}{4000}$，在草图所给出的界 $\frac{f(1)-f(2)}{n} = \frac{1}{2000}$ 之内。两个和也都略低于极限；对于递减的 f 并以右端的函数值为高，结果正应如此。

常见错误

- 把第三个极限写成 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$：公式是在 $1 + m/n$ 处而不是在 m/n 处计算 f 的值，所以那个 1 的平移必须放进 f 里面。
- 忘记最后一项（$m = n$）是 $\frac{n}{2n^2}$，它对应 $\frac{1}{n} f(2)$：求和的范围是全部 n 个右端点，而不是 $n+1$ 个点。

STEP 之外

这些都是黎曼和（Riemann sum），而草图的论证正是黎曼积分（Riemann integral）定义的雏形：当上和（upper sum）与下和（lower sum）可以夹迫到一起时，函数便是可积（integrable）的，而闭区间上的每个连续函数都具有这个性质。同一个想法也可以倒

过来用，把和化为积分来估算，例如用于证明 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本数学分析入门书）中有一章讲黎曼积分，写得十分易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。