详细解答

STEP III 1999，第 2 题

纯数学 · 实根的计数

STEP III 1999，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q2

关键思路

在第 (i) 部分，导数（derivative）可以分解为一个完全平方（perfect square）乘以 e^x，所以函数永不递减，而事实上它是严格递增（strictly increasing）的。在第 (ii) 部分，新函数的导数恰好在 $(1+x^2)e^x = k$ 时为零，而这正是第 (i) 部分的方程。由此可知，新函数只有一个转向点（turning point），而且是极小点（minimum）。之后，一切都取决于 $x \to -\infty$ 时的情况，此时 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$。$2/\pi$ 这个数就是由此而来。

解答

第 (i) 部分

由积法则（product rule），

$$f'(x) = 2x\,e^x + (1+x^2)e^x = e^x\left(x^2+2x+1\right) = e^x(1+x)^2.$$

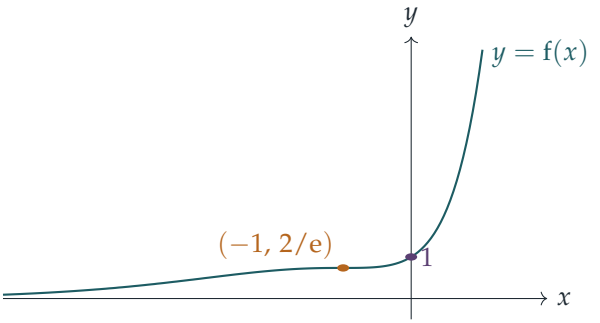
由于 $e^x > 0$ 且 $(1+x)^2 \geq 0$，对所有 x 都有 $f'(x) \geq 0$，正如所求。等号只在 $x = -1$ 时成立。

想一想 $f'(-1) = 0$，那么 f 真的是严格递增吗?

是的。若 $a < b$，则 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$，而被积函数（integrand）连续（continuous）、非负，并且在 $[a,b]$ 上最多只有一点为零，所以这个积分严格为正。单单一个驻点（stationary point）并不能阻止函数递增。这里 $x = -1$ 是一个驻拐点（stationary point of inflection）：f' 在它的两侧都是正的。

要画出略图，我们需要：

- 对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > 0$，因为两个因子都是正的；
- $\mathrm{f}(0) = 1$，而拐点是 $(-1, 2/\mathrm{e}) \approx (-1, 0.74)$；
- 当 $x \to \infty$ 时，$\mathrm{f}(x) \to \infty$；
- 当 $x \to -\infty$ 时，$\mathrm{f}(x) \to 0$，因为 e^x 衰减的速度比任何多项式增长的速度都快（$x^2\mathrm{e}^x \to 0$）。所以负 x 轴是一条渐近线（asymptote）。



现在 f 连续且严格递增，并且当 $x \to -\infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to 0$，当 $x \to \infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to \infty$。所以它取遍 $(0, \infty)$ 内的每一个值（介值定理（intermediate value theorem）），而且每个值恰好取一次（严格递增）。它永远不会取 ≤ 0 的值，因为 $\mathrm{f} > 0$。因此 $(1 + x^2)\mathrm{e}^x = k$ 在 $k > 0$ 时恰有一个实根（real root），在 $k \leq 0$ 时没有实根。 ■

第 (ii) 部分

设

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^x - 1 - k \tan^{-1} x.$$

立即可见 $\mathrm{g}(0) = 1 - 1 - 0 = 0$，所以 $x = 0$ 永远是一个根。其次，

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{k}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)\mathrm{e}^x - k}{1 + x^2} = \frac{\mathrm{f}(x) - k}{1 + x^2}.$$

两种情况下都有 $k > 0$，所以由第 (i) 部分，恰有一个数 a 满足 $\mathrm{f}(a) = k$。因为 f 严格递增，当 $x < a$ 时 $\mathrm{f}(x) < k$，当 $x > a$ 时 $\mathrm{f}(x) > k$。因此

$$\mathrm{g}'(x) < 0 \text{ 对于} x < a, \qquad \mathrm{g}'(x) > 0 \text{ 对于} x > a.$$

所以 g 在 $(-\infty, a]$ 上严格递减（strictly decreasing），在 $[a, \infty)$ 上严格递增，并在 $x = a$ 处有唯一的极小点。特别地，g 在 a 的每一侧最多只有一个根，所以总共最多有两个根。

a 在哪里？ 两种情况下都有 $k < 1 = \mathrm{f}(0)$，所以 $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$，由此得 $a < 0$。于是 $x = 0$ 位于递增的一段 $[a, \infty)$ 内。它是该处唯一的根，并且

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

余下要判断的，是 g 在 $(-\infty, a)$ 内是否还有一个根。

$x \to -\infty$ 时的表现。 由于 $\mathrm{e}^x \to 0$ 且 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$，

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{当} x \to -\infty.$$

把这个极限（limit）记作 L。因为 g 在 $(-\infty, a]$ 上严格递减，g 在该处的每一个值都严格小于 L。要看出这一点，取 $x \le a$ 和任意 $x' < x$。每一个 $y < x'$ 都满足 $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$，所以令 $y \to -\infty$ 可得 $L \ge \mathrm{g}(x')$。因此 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$。

(a) $0 < k \le 2/\pi$。这时 $L \le 0$，所以对每一个 $x \le a$ 都有 $\mathrm{g}(x) < L \le 0$。在 a 的左方没有根，故方程**恰有一个实根**，就是 $x = 0$。

(b) $2/\pi < k < 1$。这时 $L > 0$，所以对所有足够负的 x 都有 $\mathrm{g}(x) > 0$，而 $\mathrm{g}(a) < 0$。由介值定理，在 $(-\infty, a)$ 内有一个根，而且因为 g 严格递减，它是该处唯一的根。连同 $x = 0$，方程**恰有两个实根**：一个负根（小于 a）和 $x = 0$。

> ? **想一想** 为甚么边界情况 $k = 2/\pi$ 归入 (a)?

当 $k = 2/\pi$ 时，左方的极限恰好是 $L = 0$。递减的一支从下方趋近 0，但永远不会到达，所以不会出现第二个根。这一点正是靠严格单调性（strict monotonicity）来决定的。

验算

- 在随机选取的点上以数值方法对 f 求导，结果与 $\mathrm{e}^x(1+x)^2$ 吻合，而且 $\mathrm{f}(-1) = 2/\mathrm{e} \approx 0.736$。
- 我们在 $[-200, 10]$ 上用细密的格点数算 g 的变号次数。当 $k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$ 和 $2/\pi \approx 0.6366$ 时有一个根，当 $k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ 时有两个根。当 $k = 0.65$ 时，负根离得很远（在 $x \approx -31$ 附近），因为 $L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$ 非常小。
- 当 $k = 0.7$ 时，极小点是 $a \approx -1.81$，而当 $k \to 1^-$ 时 $a \to 0^-$。这是吻合的：在 $k = 1$ 时，$\mathrm{g}'(0) = 0$，$x = 0$ 成为二重根（double root）。

常见错误

- 忘记了 $x = 0$ 永远是一个根，于是只数算由 $-\infty$ 处变号而来的根。
- 以为当 $x \to -\infty$ 时 $\tan^{-1} x \to -\infty$。其实它是有界（bounded）的，趋向 $-\frac{\pi}{2}$。

▶ 由 $f'(-1) = 0$ 断定 f 在 $x = -1$ 处有转向点。

STEP 之外

这里的论证是实分析（real analysis）中一种标准技巧的典范：在某区间上严格单调的连续函数在该区间内最多只有一个零点（zero），而介值定理（配合无穷远处的极限使用）则告诉我们它何时确有一个零点。先找出函数的转向点，再检查函数在转向点和两端的正负号，从而数算根的数目，这正是罗尔定理（Rolle's theorem）及其推论背后的想法。Abbott 的 *Understanding Analysis* 严谨地阐述了连续性、介值定理和均值定理（mean value theorem）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。