详细解答

STEP III 1999，第 14 题

概率与统计 • 以条件化求期望值

> **STEP III 1999，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q14

关键思路

在 H1 中，奖金只取决于首次成功在何时出现，因此期望值（expectation）是一个有限的等差等比级数（arithmetico-geometric series）之和 $\sum r\,p\,q^{r-1}$。处理这类和式的标准技巧，是把和式减去它自身的 q 倍。在 H2 中，我们以回合数 N 为条件，再把 H1 的答案按泊松分布（Poisson distribution）取平均。这只需用到泊松和式 $\sum \lambda^n x^n/n!$ 与 $\sum n\lambda^n x^n/n!$，两者都可由指数级数（exponential series）得出。

解答

游戏 H1

设 W 为她的奖金（以英镑计）。各回合互相独立，每回合成功的概率为 p。她首次成功出现在第 r 回合，当且仅当首 $r-1$ 回合均失败而第 r 回合成功，所以

$$\mathrm{P}(W=r)=q^{r-1}p \qquad (1\le r\le n),$$

其余情况下 $W=0$，对期望值没有贡献。因此

$$\mathrm{E}(W)=p\,S, \qquad \text{其中} S=\sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1}=1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}.$$

乘以 q 后相减，并把 q 的同次幂对齐：

$$\begin{aligned} S-qS &= 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}-nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q}-nq^n, \end{aligned}$$

这里用了等比级数（geometric series）的求和公式；由于 $q \neq 1$，公式成立。因为 $1-q=p$，由此得 $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

这正是所要求的结果。

游戏 H2

设 $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ 为她获准进行的回合数，则 $\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$。记

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

已知 $N=n\geq 1$ 时，她玩的是有 n 个回合的 H1，所以奖金的期望值为 $g(n)$。已知 $N=0$ 时，她一无所获。根据全期望定律（law of total expectation，即以 N 为条件），

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

> **想一想** $g(n)$ 的三个部分若写成由 $n=0$ 开始的完整泊松和式，会较易处理。我们可以让和式由 $n=0$ 开始吗？

可以：$g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$，与 $N=0$ 时奖金为零相符。所以

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

第一项之和为 1，因为各概率之和为 1。至于其余各项，我们需要两个级数，两者对所有实数 x 都成立：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

取 $x=q$，并留意 $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$。于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

nq^{n+1} 这一项是 nq^n 的 q 倍，所以它的贡献是 $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$。综合起来，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

最后一步用了 $q - 1 = -p$。这就是所要求的表达式，以英镑计。

验算

- H1 取 $n = 1$：公式给出 $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$。这是正确的，因为她以概率 p 赢得 £1。
- 在 H1 中当 $n \to \infty$ 时，$q^n \to 0$ 且 $nq^n \to 0$，所以期望值趋向 $1/p$，即几何分布（geometric distribution）的平均值。同样地，当 $\lambda \to \infty$ 时，H2 的结果也趋向 $1/p$。
- 当 λ 很小时，把指数函数展开，得 $\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$。这合乎情理：她几乎总是没有回合或只有一个回合，而 $\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$。
- 数值方面，对 $n \le 14$，H1 的公式与直接求和的结果完全吻合（以分数计算）。H2 的公式与截断后的泊松和式吻合；另外，取 $\lambda = 2$、$p = 0.4$ 模拟 4×10^5 局游戏，得 0.836，而公式给出的是 0.837。

常见错误

- 弄错 $S - qS$ 的最后一项：和式 S 止于 nq^{n-1}，所以 qS 会剩下 $-nq^n$。
- 忘记 $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$ 可化简为 $\mathrm{e}^{-\lambda p}$，结果在代数运算中迷失方向。

STEP 之外

H2 中用到的和式 $\sum \mathrm{P}(N = n)\,x^n$，其实是*概率生成函数*（probability generating function）$G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$ 的值，而 $\sum n\,\mathrm{P}(N = n)\,x^n = xG'_N(x)$。对泊松变量而言，$G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$。生成函数，加上以随机的试验次数为条件这一手法，是大学一年级概率论的核心工具，例如用于研究随机和（random sums）与分支过程（branching processes）。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对两者都有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。