详细解答

STEP III 1999，第 13 题

概率与统计 · 连续先验分布的贝叶斯定理

STEP III 1999，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q13

关键思路

这里有两层随机性：首先是我那一份的大小 X，然后是提子干落在哪里。一旦以 $X = x$ 为条件（condition），每粒提子干落在我那一份的概率都是 x，而且各粒之间互相独立，所以提子干的数目服从二项分布（binomial distribution）。之后，第 (i) 部分用的是全期望定律（law of total expectation），第 (ii) 部分用的是带有连续先验分布（continuous prior）的贝叶斯定理（Bayes' theorem）。

解答

首先求 A。概率密度函数（density）的积分必须等于 1：

$$\int_0^1 Ax\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 2,$$

所以 X 在 $[0,1]$ 上的密度为 $\mathrm{f}(x) = 2x$。

设 N 为我那一份中提子干的数目。我们以最自然的方式为“随机放置”建立模型：每粒提子干的位置在整个蛋糕内均匀分布（uniformly distributed），并且与其他提子干的位置以及我取多少蛋糕都互相独立。因此，若我取了蛋糕的比例为 x，每粒提子干落在我那一份的概率就是 x，各粒之间互相独立，所以

$$N \mid (X = x) \sim \mathrm{B}(4, x).$$

第 (i) 部分

给定 $X = x$，二项分布的平均值为 $\mathrm{E}(N \mid X = x) = 4x$。对 X 取平均（即全期望定律），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \int_0^1 \mathrm{E}(N \mid X = x)\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

等价地，$\mathrm{E}(N) = 4\,\mathrm{E}(X)$，其中 $\mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}$。我那一份中提子干数目的期望值是 $\frac{8}{3}$。

第 (ii) 部分

我们要求 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$。给定 $X = x$，四粒提子干全部落在我那一份的概率是 x^4。

> **想一想** 当 X 是连续的，而 $\mathrm{P}(X = x) = 0$ 时，我们怎样运用贝叶斯定理?

我们把贝叶斯定理中的求和换成对密度的积分。在各种可能的份量大小之中，一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 的概率是 $2x\,\mathrm{d}x$，而在这一小段之下，四粒提子干全中的机会是 x^4。把各小段加起来，

$$\mathrm{P}(N = 4) = \int_0^1 x^4 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

同样地，只保留 $x > \frac{1}{2}$ 的那些小段，

$$\mathrm{P}(X > \tfrac{1}{2} \text{ 及 } N = 4) = \int_{1/2}^1 2x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{64}\Big) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}.$$

因此

$$\mathrm{P}(X > \tfrac{1}{2} \mid N = 4) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{3}} = \frac{63}{64}.$$

另一种看法：给定 $N = 4$，X 的条件密度与 $x^4 \cdot 2x$ 成正比，所以它在 $[0, 1]$ 上是 $6x^5$。它的分布函数（distribution function）是 x^6，而 $1 - (\frac{1}{2})^6 = \frac{63}{64}$。

验算

- (ii) 的答案非常接近 1，这是合理的：找到全部提子干，正是我取了一大块的有力证据。先验概率 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 被推高至 $\frac{63}{64} \approx 0.984$。
- $\frac{8}{3}$ 介乎 0 与 4 之间，而且大于 2，这正是应有的结果：密度 $2x$ 偏向较大的份量。
- 以 10^6 次试验进行蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）（取 $X = \sqrt{U}$，其中 U 服从均匀分布，这样得出的密度就是 $2x$，然后放置四粒提子干），得到 $\mathrm{E}(N) \approx 2.667$、$\mathrm{P}(N = 4) \approx 0.333$，以及条件概率 ≈ 0.9846，对比 $\frac{63}{64} = 0.984375$。

常见错误

- 忘记求 A，或者取 $A = 1$。这样 f 就不是密度函数，(i) 的期望值也会算错（虽然 A 在 (ii) 中会约去）。
- 计算了 $\mathrm{P}(N = 4 \mid X > \frac{1}{2})$，而不是 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$。条件的方向弄反了。
- 以 $(\frac{1}{2})^4$ 代替积分：份量的大小是随机的，所以我们必须把 x^4 对密度取平均，而不是代入单一个数值。

STEP 之外

这是贝叶斯推论（Bayesian inference）的缩影：密度 $2x$ 是未知比例的*先验分布*（prior），二项分布是*似然函数*（likelihood），而 $6x^5$ 是*后验分布*（posterior）。先验分布与后验分布都是贝塔分布（beta distribution），这是二项数据的共轭先验（conjugate prior）的一个例子，而拉普拉斯（Laplace）的继起法则（rule of succession）背后也是同一个计算。Blitzstein 与 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）把贝塔–二项分布的来龙去脉，以及以连续随机变量为条件的处理方法，讲解得十分清楚。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。