详细解答

STEP III 1999，第 12 题

概率与统计 · 离散联合分布

STEP III 1999，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q12

关键思路

联合概率（joint probability）对 j 和 k 的依赖，主要是通过 $j+k$ 而来，所以应按总和 $n=j+k$ 把各项分组。余下的是 $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$，它其实是一个乔装了的二项式和：乘以 $n!$ 之后就变成 $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$。此后每一部分都是指数级数（exponential series）。

解答

第 (i) 部分

设 $n \geq 1$。事件 $\{X+Y=n\}$ 是事件 $\{X=j,\, Y=n-j\}$（$j=0,1,\ldots,n$）的不相交并集（disjoint union）。在其中每一个事件上都有 $j+k=n$，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1} \frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

其中用到由二项式定理（binomial theorem）得出的 $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$，以及当 $n \geq 1$ 时 $n/n! = 1/(n-1)!$。

为完整起见，由于有因子 $j+k$，$\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\, Y=0) = 0$。

第 (ii) 部分

概率 $\mathrm{P}(X+Y=n)$ 对所有 $n \geq 0$ 求和，结果必须等于 1。$n=0$ 的一项是零，所以

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

这里我们设 $m = n-1$，并用了指数级数 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$。因此 $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$，正是所要证明的结果。

第 (iii) 部分

设 $g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$。由积法则（product rule），

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

当 $x > 0$ 时，$1+2x$ 和 e^{2x-1} 都是正数，所以 $g'(x) > 0$，而 g 在 $x > 0$ 上严格递增（strictly increasing）。

> ? **想一想** 为甚么“递增”可以推出“最多只有一个解”？

若 $0 < x_1 < x_2$，则 $g(x_1) < g(x_2)$，所以 g 不可能在两个不同的点上都取值 1。由于 $\lambda > 0$，第 (ii) 部分得出的方程 $g(\lambda) = 1$ 因此最多只有一个解。

现在试一试那个令指数变成零的明显候选值 $x = \frac{1}{2}$：$g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$。所以 $\frac{1}{2}$ 是一个解，而根据唯一性（uniqueness），它就是唯一的解：

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

代入这个值，第 (i) 部分的结果变成：当 $n \geq 1$ 时，$\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$。

第 (iv) 部分

由于 $X+Y$ 只取 $n \geq 1$ 的值，而其概率刚刚已经求出，

$$\mathrm{E}(2^{X+Y}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

这里同样设 $m = n-1$ 并使用指数级数（该级数收敛，所以期望值（expectation）是有限的）。

验算

- 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，第 (i) 部分的公式表明 $X+Y-1$ 服从平均值为 1 的泊松分布（Poisson distribution）。它的概率 $\mathrm{e}^{-1}/m!$ 之和当然是 1，与第 (ii) 部分一致。

- 以数值方法把 $j+k<60$ 范围内的联合概率加起来，总和是 1.000000；把 $2^{j+k}\,\mathrm{P}(X=j, Y=k)$ 加起来则得 5.436564，与 $2\mathrm{e}\approx 5.436564$ 吻合。
- 对第 (iv) 部分作一个简单的合理性检查：$2^{X+Y}=2\cdot 2^{N}$，其中 $N\sim\mathrm{Po}(1)$，而对泊松变量有 $\mathrm{E}(s^N)=\mathrm{e}^{s-1}$，所以答案是 $2\mathrm{e}^{1}$。

常见错误

- 忘记了 $n/n!=1/(n-1)!$，结果在第 (ii) 部分的级数里留下一个难以处理的因子 n。
- 把 $n=0$ 的一项当作非零：因子 $j+k$ 令这一项消失，这正是各个求和都由 $n=1$ 开始的原因。
- 在第 (iii) 部分只证明了 $\lambda=\frac{1}{2}$ 可行。你还需要用单调性（monotonicity）排除其他解。

STEP 之外

$\mathrm{E}(s^{X+Y})$ 这个量是 $X+Y$ 的*概率母函数*（*probability generating function*），这里是在 $s=2$ 处取值。母函数把概率的求和化为幂级数（power series），是大学第一门概率课程中用来辨认分布和求矩（moments）的标准工具。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（一本概率论入门书）对母函数和泊松分布有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。