详细解答

STEP III 1999，第 11 题

力学 · 刚体转动

> **STEP III 1999，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q11

关键思路

圆环一旦到达桌边，便是一个绕固定点转动的刚体（rigid body），因此两条方程已足以解决整个问题：能量守恒（conservation of energy）给出任意角度时的角速率（angular speed）；对圆心应用牛顿第二定律（Newton's second law），并沿指向支点的方向分解，则给出法向反作用力（normal reaction）。当这个反作用力降至零时，圆环便失去接触。第一部分求得的转动惯量（moment of inertia），正是能量方程所需要的。

解答

转动惯量

薄圆环上每一个质点与圆心 C 的距离都是 a，所以对于通过 C 并垂直于圆环所在平面的轴，转动惯量为

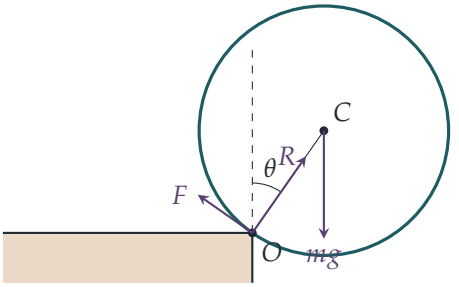
$$I_C = \sum \delta m\, a^2 = ma^2.$$

圆周上的一点 O 与 C 的距离为 a，而新的轴与原来的轴平行，故由平行轴定理（parallel axis theorem）得

$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

滚过桌边

把圆环看成均匀的刚性圆环，并把桌边看成一个固定点 O。两个表面都是粗糙的，我们假设摩擦力（friction）足够大，使圆环始终不打滑：在桌面上它作滚动，越过桌边时则绕 O 转动而不滑动。设 θ 为 OC 与向上铅垂线所成的角，因此圆环到达桌边的一刻 $\theta = 0$，并记 $\omega = \dot{\theta}$。



想一想 圆环到达桌边的一瞬间，它绕 O 的角速率是多少?

以速率 v 滚动而不打滑的圆环，角速率为 v/a，而它在每一瞬间的运动都是绕接触点的转动。在到达桌边的一瞬间，接触点正是 O，圆环只是继续绕着它转动：由于圆环没有失去接触，所以不会发生碰撞。因此当 $\theta = 0$ 时 $\omega = v/a$。

能量。只要圆环仍与 O 保持接触，作用于 O 的力便不作功（施力点静止不动），所以机械能（mechanical energy）守恒。圆心下降了 $a - a\cos\theta$，故

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

指向支点的方向。圆心 C 在以 O 为中心、半径为 a 的圆上运动，所以它的加速度有一个由 C 指向 O 的分量 $a\omega^2$。作用于圆环的力有：重量 mg、沿 OC 的法向反作用力 R（方向背离 O），以及垂直于 OC 的摩擦力 F，后者沿 OC 没有分量。沿 CO 方向分解：

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

代入能量方程，

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

这个量随 θ 增加而减少，而当 R 首次降至零时，圆环便与桌边失去接触，此时

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{即} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

这正是所要证明的结果。

想一想 这个结果对任何 v 都合理吗?

当 $\theta = 0$ 时，$R = m(g - v^2/a)$，只有在 $v^2 < ag$ 时才是正数。这就是圆环滚过桌边而不会立即失去接触的条件，也是题目所假设的；它同时正是右方小于 1 的条件，所以存在一个有效的角 θ。

为完整起见，沿垂直于 OC 的方向分解，并利用 $I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$，可得 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ 及 $F = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta$。这就是桌边为防止打滑而必须提供的摩擦力，也说明了为何两个表面都必须是粗糙的。

验算

- 若 $v \to 0$，圆环只是从桌边翻倒下去，并在 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 时失去接触，即 $\theta = 60°$。当 $v^2 \to ag$ 时，$\theta \to 0$：圆环几乎没有碰到桌边。两个极限情况都合乎情理。
- 数值上，取 $a = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，由 $\dot\theta = v/a$ 开始对 $\ddot\theta = g\sin\theta/(2a)$ 逐步计算，直至 $g\cos\theta = a\dot\theta^2$ 为止，得 $\cos\theta \approx 0.69132$，与 $\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$ 吻合。

常见错误

- 在能量方程中使用 $I_C = ma^2$，或在 $\frac{1}{2}I_O\omega^2$ 之上另加一项平移动能（translational kinetic energy）。绕 O 的转动已经包含了圆心的运动。
- 忘记了初始动能，结果对任何 v 都得出 $\cos\theta = \frac{1}{2}$。

STEP 之外

从桌边滚落是典型的*单侧约束*（unilateral constraint）：桌边只能推而不能拉，所以运动方程只在它们所预测的反作用力非负时才适用。质点从球面滑落，以及汽车驶过拱桥，都受同一个想法支配。在大学一年级的课程中，你会在学习刚体动力学（rigid-body dynamics）以及平行轴定理和垂直轴定理（perpendicular axis theorem）时遇到它。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这些课题都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。