详细解答

STEP III 1999，第 10 题

力学 • 下落链条的冲量

> **STEP III 1999，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q10

关键思路

链条塌落期间，仍然悬在空中的部分处于自由落体（free fall）状态：除了重力之外，没有任何力拉着它。因此每个链环只是从原来的位置直接落下，各链环之间唯一的分别就是下落的高度。桌面对每个链环各施加一个冲量（impulse），使它停下。把这些冲量加起来，得到一个平方根之和；当 n 很大时，这就是 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 的黎曼和（Riemann sum）。

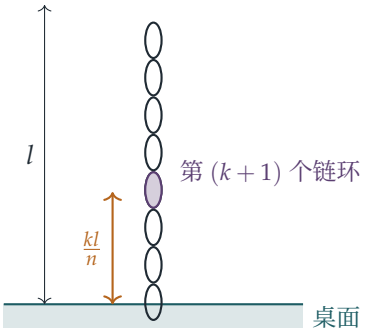
解答

模型

每个链环的质量为 $\frac{m}{n}$，长度为 $\frac{l}{n}$。链环是光滑（smooth）的，而链条完全柔软，所以它不能传递推力。我们把每个链环看作一个质点（particle），它到达桌面时会即时静止（碰撞属非弹性（inelastic））。

> ? **想一想** 下方的链环正被桌面截停，为甚么链条悬空的部分仍然是自由落体?

链条释放后，若没有张力（tension），每个链环的加速度都是 g；而张力为零的下落链条并无矛盾：所有链环一起运动，彼此保持接触而不被拉长。桌面把链环向上推，使它停下，但柔软的链条无法把这个推力传给上方的链环。由于链环光滑，它们之间也没有摩擦力。因此，仍在空中的链环除了重力之外不受任何其他力的作用，每个链环都自由下落，直至着地为止。



第 $(k+1)$ 个链环

第 $(k+1)$ 个链环下方有 k 个链环，总长度为 $\frac{kl}{n}$。由于链条底端刚好触及桌面，第 $(k+1)$ 个链环要下落 $\frac{kl}{n}$ 的距离才到达桌面。它由静止开始自由下落，到达时的速率由 $v^2 = 2gs$ 给出：

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

其后它被截停，所以它的动量（momentum）变化的大小为

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

方向向上（链环失去了向下的动量 $\frac{m}{n}v_k$）。当 $k = 0$ 时，这个值为零：最底的链环本来就已经接触桌面。

总冲量

根据牛顿第三定律（Newton's third law），桌面从第 $(k+1)$ 个链环所受的冲量，大小等于该链环的动量变化，方向向下。链环的编号为 $k+1 = 1, 2, \ldots, n$，所以桌面因碰撞而承受的总冲量为

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

? **想一想** $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$ 近似于哪一个积分?

把 $[0,1]$ 分成多个长条，这个和就是 n 个阔度为 $\frac{1}{n}$ 的长方形的面积之和，各长方形的高度是 $\sqrt{x}$ 在长条左端点 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ 的值。所以当 n 很大时，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

因此

$$J \approx \tfrac{2}{3}\,m\sqrt{2gl},$$

这正是所求的结果。

再看看这个近似有多准确：$\sqrt{x}$ 是递增函数，所以在长条 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ 上，左端点的高度 $\sqrt{k/n}$ 位于曲线之下，而在 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 上则位于曲线之上。对所有长条求和，得

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{即} \quad \tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

上下界都趋向 $\frac{2}{3}$，所以相对误差（relative error）最多约为 $\frac{3}{2n}$。

验算

- 单位：$m\sqrt{gl}$ 是质量 × 速率，即动量，冲量的单位正应如此。
- 数值上，取 $m = 2$、$l = 3$、$g = 9.8$：$\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$，而精确的和在 $n = 10$ 时为 9.363，$n = 100$ 时为 10.144，$n = 1000$ 时为 10.216。两者之比趋近 1，而且始终落在上述的上下界之内。
- 最后着地的链环几乎下落了整个长度 l，速率接近 $\sqrt{2gl}$。假如全部质量都以这个速率到达，冲量便是 $m\sqrt{2gl}$。大部分链环下落的距离都较短，所以答案是这个值的某个分数，十分合理。

常见错误

- 以为第 $(k+1)$ 个链环下落的距离是 $\frac{(k+1)l}{n}$。它下方其实只有 k 个链环。
- 把已经躺在桌面上的那段链条的稳定重量也计算在内。题目只问碰撞所产生的冲量。

STEP 之外

由于所有链环在 $\sqrt{2l/g}$ 的时间内全部着地，单是碰撞便对桌面施加了 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$ 的平均力。事实上，在每一刻，撞击力都是已落在桌面上那段链条的重量的两倍，所以放在桌下的磅秤，读数会在最后一个链环着地的一刻升至 $3mg$。这类质量连续增加或减少的问题（下落的链条、火箭、雨点），要用牛顿第二定律（Newton's second law）的变质量（variable-mass）形式来处理。详细而严谨的论述可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。