详细解答

STEP III 1999，第 1 题

纯数学 · 三次方程的根

> **STEP III 1999，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q1

关键思路

这里的一切都源自韦达定理(Vieta's formulas)：对于三次方程(cubic)$x^3 - px^2 + qx - r = 0$，设其根（roots）为 α, β, γ，则

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

等比数列（geometric progression）是以乘法的方式围绕中间项对称的，所以根之积 r 和比值 q/p 能把中间的根找出来。等差数列（arithmetic progression）则是以加法的方式围绕中间项对称的，所以改由根之和 p 把中间的根找出来。

解答

第 (i) 部分

设三个根为 a/k、a 和 ak。要使 a/k 有意义，必须有 $k \neq 0$；又因为根之积为 $r \neq 0$，所以亦有 $a \neq 0$。由韦达定理得

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

p 和 q 中出现了同一个括号。由于 $p \neq 0$，这个括号不等于零，所以可以相除：

$$\frac{q}{p} = a.$$

因此 q/p 是其中一个根（即中间的那个）。于是 $q = ap$，从而

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{即} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

这正是所要证明的。

第 (ii) 部分

现在假设 $r = q^3/p^3$，并记 $a = q/p$，于是 $r = a^3$。把 $x = a$ 代入三次方程，并利用 $p\,a^2 = q^2/p = q\,a$，得

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

所以 q/p 是一个根。

由于 $r \neq 0$，可知 $q \neq 0$，因此 $a \neq 0$。把另外两个根称为 β 和 γ。三个根之积为 r，所以

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

这里两边除以了 $a \neq 0$。

> **想一想** 怎样把 $\beta\gamma = a^2$ 化成 a/k、a、ak 的形式?

我们需要选定 k。由于 $\beta\gamma = a^2 \neq 0$，β 和 γ 都不是零。定义 $k = \gamma/a$，于是 $\gamma = ak$ 且 $k \neq 0$。那么

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

所以三个根是 a/k、a 和 ak，每一个都是由前一个乘以 k 而得。它们成等比数列。（当 β 和 γ 不是实数时，公比 k 可能是复数。这个论证并不要求它们是实数。）

综合第 (i) 和第 (ii) 部分可知：当 $p \neq 0$ 且 $r \neq 0$ 时，三个根成等比数列，当且仅当（if and only if）$q^3 = rp^3$。

第 (iii) 部分

必要性。设三个根为 $b - d$、b 和 $b + d$。它们的和是 $3b = p$，所以中间的根是 $b = p/3$。把 $x = p/3$ 代入三次方程，再乘以 27：

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

充分性。反过来，假设 $2p^3 - 9pq + 27r = 0$。把上面的步骤倒过来，可知 $p/3$ 是一个根。于是另外两个根之和为 $p - p/3 = 2p/3$，所以可以把它们写成 $p/3 - d$ 和 $p/3 + d$，其中 d 是某个数（可能是复数）。三个根 $p/3 - d$、$p/3$、$p/3 + d$ 成等差数列。

因此，充分必要条件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{2p^3 - 9pq + 27r = 0}.$$

验算

- 根为 $1, 2, 4$（等比数列）时，$p = 7$，$q = 14$，$r = 8$。这时 $q/p = 2$ 正是中间的根，而且 $q^3 = 2744 = 8 \cdot 343 = rp^3$。
- 根为 $1, 2, 3$（等差数列）时，$p = 6$，$q = 11$，$r = 6$，而 $2 \cdot 216 - 9 \cdot 66 + 27 \cdot 6 = 432 - 594 + 162 = 0$。等比数列 $1, 2, 4$ 则给出 $686 - 882 + 216 = 20 \neq 0$，这也合乎预期。
- 我们亦用数千个随机三次方程（包括有复数根的）对全部三个部分作了数值检验。所有结果都在 10^{-11} 的误差范围内吻合。

常见错误

- 除以 $1/k + 1 + k$ 却没有说明它为何不等于零。它不等于零，是因为它等于 p/a，而 $p \neq 0$。
- 在第 (ii) 部分，只证明了 q/p 是一个根以及 $\beta\gamma = (q/p)^2$，然后没有具体写出公比（common ratio），就断言三个根成等比数列。
- 在第 (iii) 部分，只证明了一个方向。“充分必要”需要两个方向都证明。

STEP 之外

韦达定理说明，多项式的系数就是其根的*基本对称函数*（elementary symmetric functions）。有一个经典定理指出，根的每一个对称多项式（symmetric polynomial）都可以用这些基本对称函数表示出来。这正是伽罗瓦理论（Galois theory）的起点，该理论解释了多项式的根在甚么情况下可以用根式（radicals）求出。顺带一提，代换 $x = y + p/3$ 可以消去三次方程中的 x^2 项，而所得的缺项三次方程（depressed cubic）的常数项是 $2p^3 - 9pq + 27r$ 的倍数。想知道这些想法会通往何处，Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是个很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。