详细解答

STEP II 1999，第 9 题

力学 • 变力作用下的运动

> **STEP II 1999，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q9

关键思路

加速度（acceleration）只取决于距离 x，与时间无关，所以最合适的工具是 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。这样一来，运动方程（equation of motion）就变成一条可以直接积分的方程，从而得出 v^2 作为 x 的函数（其实就是一条乔装了的能量方程（energy equation））。余下的工作，都是在问 v^2 在哪里降至零：碎片就是在那里停下，然后掉头返回。

解答

我们把每块碎片看成一个质点（particle），沿着一条通过定点 G 的直线运动，以 x 表示它与 G 的距离，$v = \dot{x}$ 表示它的速度，并规定远离 G 的方向为正。起初 $x = 0$ 而 $v = u > 0$。由于加速度指向 G，在这个规定下它是负的。

第 (i) 部分

当 $x < R$ 时，$\ddot{x} = -k_1 x^3$，写成 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 便得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

分离变量，并由起点（$x = 0$，$v = u$）开始积分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

只要碎片仍在向外运动，便有 $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$。

第 (ii) 部分

由于 $2a^2 = k_1R^4$，(i) 的公式可写成 $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$。当 x 由 0 开始增加时，v^2 随之递减，并在

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

处降至零。若 $u < a$，则 $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$，所以 $x_0 < R$。

> **想一想** 在 x_0 处速率为零，但为甚么这就表示碎片不会走得更远?

在 x_0 处，碎片瞬间静止，但它在该处的加速度是 $-k_1x_0^3 \neq 0$，方向指向 G。所以它并非处于平衡（equilibrium）状态：它会开始向 G 往回运动。事实上，x 根本不可能超过 x_0，因为那样的话 (i) 的公式便会给出 $v^2 < 0$。碎片最远只能到达 $x_0 < R$，所以它永远不会到达与 G 相距 R 之处，这正是所要证明的。

第 (iii) 部分

首先，$u \geq b$ 的碎片必定能到达 R。根据定义，

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

所以当 $x \leq R$ 时，由第 (i) 部分得

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

特别地，碎片到达 $x = R$ 时，$v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$。

当 $x \geq R$ 时，运动方程是 $v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$。由 $x = R$ 开始积分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

这个组合正好说明了 b 为何要这样定义：b^2 就是由 G 逃逸到无穷远处，以 $\frac{1}{2}v^2$ 计算所须付出的总“代价”。

若 $u \geq b$，则 $u^2 - b^2 \geq 0$ 而 $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$，所以对每一个 $x \geq R$ 都有 $v^2 > 0$（这包括临界情况 $u = b$）。连同 $x \leq R$ 时的下界，可知在碎片可能到达的每一个距离上，v^2 都严格为正。

速度 v 对时间连续，而且起初为 $u > 0$。它要变成负数，就必须经过 0，即在某个位置上有 $v^2 = 0$，而我们刚刚证明了这不会发生。所以自始至终 $v > 0$：由爆炸的一刻起，碎片一直在远离 G。（由于 $v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$，它会一直走下去，且 $x \to \infty$。）

第 (iv) 部分

现在 $a < u < b$。由于 $u > a$，(iii) 的论证表明在 $[0, R]$ 上 $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$，所以碎片到达 R 时仍在向外运动。越过 R 之后，

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

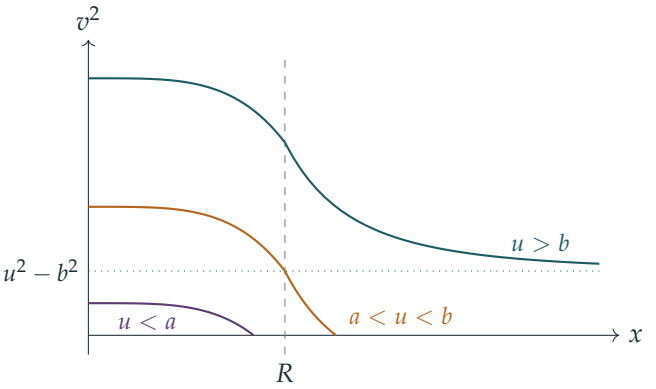
而此时 $b^2 - u^2 > 0$。这个式子随 x 增加而递减，并在

$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

时等于零。这一点确实位于 $x \geq R$ 的区域内：由于 $u > a$，$b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$，所以 $x^3 > R^3$。与 (ii) 一样，碎片在该处停下，但仍有指向 G 的非零加速度 $-k_2 x^{-4}$，而且它不可能走得更远，否则 v^2 便会是负数。与 G 的最大距离是

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

下图显示当 $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$（因此 $a^2 = 1$、$b^2 = 3$）时，三类初速率下 v^2 对 x 的图像。每块碎片都会一直前进，直至它的曲线与横轴相交为止。



验算

- 取 $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$，得 $a = 1$、$b = \sqrt{3}$；当 $u = \sqrt{2}$ 时，公式给出 $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$，刚好超过 R，与预期相符。
- 当 $u \to a^+$ 时，$b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$ 而 $x_{\max} \to R$；当 $u \to b^-$ 时，$x_{\max} \to \infty$。两者在边界上都与第 (ii) 和第 (iii) 部分吻合。
- 以数值方法逐步计算这个运动（龙格—库塔法（Runge–Kutta），随机选取十二组 k_1、k_2、R），结果重现了 v^2 的公式、$u < a$ 时的折返点 $(2u^2/k_1)^{1/4}$、(iv) 中 $x_{\max}$ 的值（误差在 0.1% 以内），以及 $u \geq b$ 时完全没有折返。

常见错误

- 第二阶段由 $x = 0$ 开始积分，而不是由 $x = R$ 并以 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4$ 开始：力的规律在 R 处改变，所以积分常数也随之改变。
- 弄丢正负号：加速度指向 G，所以 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 是 *负的* k_1x^3 或 k_2x^{-4}。
- 在 (iii) 中只检查 $x \geq R$，却忘记在 R 以内 v 也必须保持为正。

STEP 之外

设 $V'(x)$ 等于加速度的相反数，则对任何只取决于位置的力，$\frac{1}{2}v^2 + V(x)$ 这个量都是守恒的。画出 V 的图像（一个“势阱”（potential well）），便可一眼看出哪些运动是有界的、哪些会逃逸，而 b 不过是这个势阱的逃逸速率（escape speed）。同样的推理可得出真实重力下的逃逸速度，也是对非线性振子（nonlinear oscillator）作相平面分析（phase-plane analysis）的起点。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 详细阐述了这类能量图。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。