详细解答

STEP II 1999，第 8 题

纯数学 · 三角级数

STEP II 1999，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q8

关键思路

把 $\sin k\theta$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，利用积化和差公式（product-to-sum formula）便可将它化成两个余弦之*差*，于是整个和式可以裂项相消（telescope）。之后两部分的关键都在于选取合适的 θ：取 $\theta = \pi/n$ 时，那个难缠的余弦 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$ 会变成 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 的简单倍数。至于 (ii)，半角公式（half-angle formula）可把 $\sin^2$ 化为余弦，而和式 $\sum k\cos k\theta$ 正好就是对 $(*)$ 求导所得的结果。

解答

证明 $(*)$

假设 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$, 使右边有意义。在恒等式（identity）$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 中取 $A = k\theta$ 及 $B = \frac{1}{2}\theta$，得

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta = \cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

由 $k=0$ 加至 n，第 k 行所减去的 $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$ 会在第 $k+1$ 行加回来，因此只剩下首项和末项：

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

因为余弦是偶函数（even function）。两边除以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$ 即得 $(*)$。

第 (i) 部分

取 $\theta = \pi/n$（其中 $n \geq 1$），则 $\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$。于是

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

所以 $(*)$ 的分子是 $2\cos\frac{\pi}{2n}$，而

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

这是精确的结果。当 n 很大时，$\frac{\pi}{2n}$ 很小，故 $\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$ 而 $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$，由此得

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

第 (ii) 部分

由倍角公式（double-angle formula），$\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$，所以取 $\theta = \pi/n$ 时

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

要求出 $\sum k\cos k\theta$，我们把 $(*)$ 对 θ 求导；左边正好变成这个和式。先把右边拆成

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

记 $S = \sin\frac{1}{2}\theta$ 及 $c = \cos\frac{1}{2}\theta$。第一部分求导后得 $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$。根据商法则（quotient rule），第二部分求导后得

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

想一想 为甚么要在求导之后才代入 $\theta = \pi/n$，而不是之前?

恒等式 $(*)$ 对所有 θ（只要 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$）都成立，所以我们可以对它求导。假如先固定 $\theta = \pi/n$，得到的只是一个数，根本无从求导。一旦得到以 θ 表示的导数恒等式，我们便可以代入任何想要的值。

现在取 $\theta = \pi/n$。与 (i) 一样，$(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$，所以 $\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$ 而 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2 - c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

其中用了 $c^2 = 1 - S^2$。代入 (1)：

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

这是精确的结果。当 n 很大时，$\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$，故 $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$；而 $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$，其中第二项与 n^2 相比可以忽略。所以

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right) n^2,$$

正如题目所求。

验算

- 在 (ii) 中取 $n = 1$：和为 $0 + 1 \cdot \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$，而精确公式给出 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$。
- 在 (i) 中取 $n = 2$：和为 $0 + 1 + 0 = 1$，而 $\cot\frac{\pi}{4} = 1$。
- 数值上，当 $n = 1000$ 时，(i) 的和是 636.6192…，而 $2n/\pi = 636.6198\ldots$；(ii) 的和是 351 821.3，与 $(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2})n^2$ 相差不超过 0.15%。(ii) 的相对误差（relative error）以 $1/n$ 的速度缩小，原因是略去了 $\frac{n}{2}$ 这一项。

常见错误

- 写成 $\cos(\pi + x) = \cos x$：正确的值是 $-\cos x$，而正是这个负号令 (i) 的分子变成两倍。
- 在 (ii) 中漏掉 $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ 这一项，而 $\frac{1}{4}n^2$ 正是由它而来。

STEP 之外

第 (i) 部分其实是乔装了的黎曼和(Riemann sum)：$\frac{\pi}{n}\sum \sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2$,这正正就是 $\sum \approx 2n/\pi$ 的意思。同样地, (ii) 所说的是 $\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}$。把同一个裂项技巧用于 $\sum\cos k\theta$，便会得到傅里叶分析（Fourier analysis）中的狄利克雷核（Dirichlet kernel）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）对黎曼和与傅里叶级数（Fourier series）有严谨的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。