详细解答

STEP II 1999，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP II 1999，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q7

关键思路

先求导，再把所有项通分到同一个公分母上：分子几乎完全消去——所有二次项互相抵消，只剩下一个一次因式，驻点（stationary point）的位置随即确定。至于描绘曲线，则把根号内的式子配方（complete the square）。这样便知道曲线在哪里有定义、当 $|x|$ 很大时有何表现，以及当 $a = 1$ 时平方根会变成绝对值（modulus），令曲线变成两段等轴双曲线（rectangular hyperbola）。

解答

设 $Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$。

当 $a > 1$ 时恰有一个驻点

若 $a > 1$，则对任意 x 均有 $Q(x) \geq a - 1 > 0$，所以曲线对所有实数 x 都有定义，而且可导。由 $y = xQ^{-1/2}$ 及 $Q'(x) = 2x - 2$，用乘积法则（product rule）可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.\end{aligned}$$

对任意 x，分母都是正数而且有限，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当 $x = a$。因此 C 恰有一个驻点，位于

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}},$$

正如题目所求。由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的正负号与 $a-x$ 相同，曲线在 $x<a$ 时上升，在 $x>a$ 时下降，所以这一点是极大点（maximum）。

> **想一想** 条件 $a>1$ 用在哪里?

用了两次：其一，它保证 $Q>0$ 处处成立，所以曲线没有缺口，也没有导数不存在的点；其二，它保证 $x=a$ 确实是曲线上的一点，因为 $Q(a)=a^2-a>0$。当 $a=1$ 时，原本应是驻点的 $x=a=1$ 正好是 $Q=0$ 之处，第 (ii) 部分出问题的地方就在这里。

另外有两项事实对描绘两条曲线都有帮助。当 $|x|$ 很大时，$\sqrt{Q}=|x|\sqrt{1-2/x+a/x^2}\approx|x|$，所以

$$y\to 1 \text{ 当} x\to+\infty, \qquad y\to -1 \text{ 当} x\to-\infty.$$

此外，y 的正负号与 x 相同，而且曲线通过原点，在该处的斜率（gradient）为 $a/a^{3/2}=1/\sqrt{a}$。

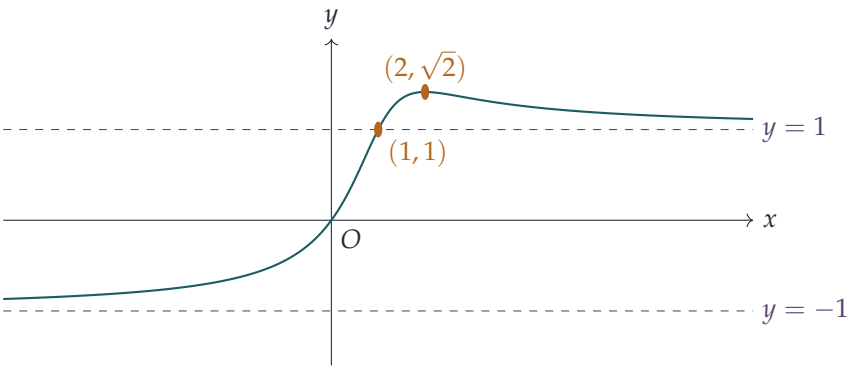
第 (i) 部分：$a=2$

这时 $y=\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$，对所有 x 都有定义，并且

- 在 $(2,\sqrt{2})$ 有极大点，在 $x<2$ 时递增，在 $x>2$ 时递减；
- 原点在曲线上，该处的斜率为 $1/\sqrt{2}$；
- 有水平渐近线（asymptote）$y=1$（当 $x\to\infty$）和 $y=-1$（当 $x\to-\infty$）。

曲线在每条渐近线的哪一侧? 设 $y=\pm1$ 并把两边平方，得 $x^2=x^2-2x+2$，所以 $x=1$，而且只有 $y=+1$ 符合（因为 y 的正负号与 x 相同）。因此曲线与 $y=1$ 只相交一次，交点为 $(1,1)$：对所有 $x>1$，曲线都在 $y=1$ 之上，过了极大点之后从上方向渐近线下降。曲线永不与 $y=-1$ 相交，所以它一直在 $y=-1$ 之上，并随着 x 由 $-\infty$ 增大而上升，逐渐离开这条渐近线。

（如果想知道更多细节：再求导一次可得 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=(2x^2-7x+4)/Q^{5/2}$，所以拐点（point of inflection）位于 $x=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{17})$，大约是 $x\approx0.72$ 和 $x\approx2.78$。描绘草图时用不着这些，但它们可以解释曲线的形状。）



第 (ii) 部分： $a = 1$

这时 $Q = (x-1)^2$，所以要排除 $x = 1$，而且由于平方根取正值，

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

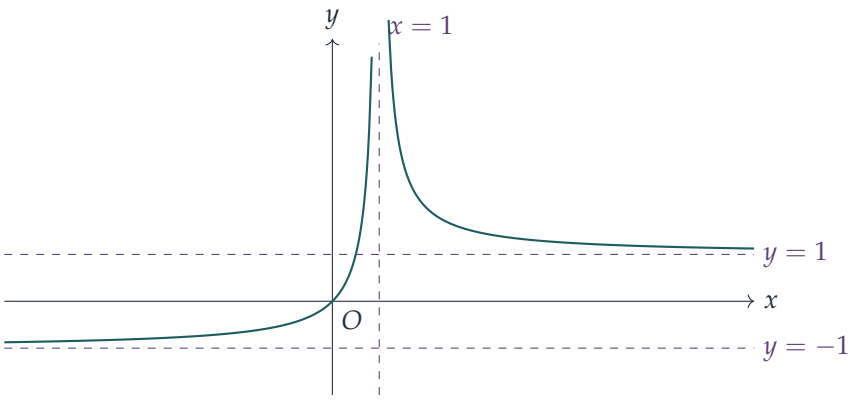
因此

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

每一支都是以 $x = 1$ 为中心的等轴双曲线的一部分。

- 当 $x < 1$：y 递增（其导数为 $1/(1-x)^2 > 0$），由 -1（当 $x \to -\infty$ 时从上方趋近）出发，以斜率 1 通过原点，再在 $x \to 1^-$ 时趋向 $+\infty$。
- 当 $x > 1$：y 递减（导数为 $-1/(x-1)^2 < 0$），由 $x \to 1^+$ 时的 $+\infty$ 下降，趋向 1（当 $x \to \infty$ 时从上方趋近）。

直线 $x = 1$ 是铅垂渐近线，而且在两侧都有 $y \to +\infty$（分子接近 1，分母是很小的正数）。曲线没有驻点：$a > 1$ 的曲线的极大点高度为 $\sqrt{a/(a-1)}$，当 $a \to 1^+$ 时，这个极大点已被推到无穷远处。一般公式亦与此吻合，因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$ 永不为零。



验算

- 以数值方法检验：在数千个随机点上，导数公式 $(a-x)/Q^{3/2}$ 与有限差分（finite difference）求得的导数吻合；而对若干个 $a>1$ 的值逐点检查正负号，都恰好找到一次变号。
- 当 $a=2$：$y(2)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1.414$，$y(1)=1$，而 $y(10^6)\approx 1.000001$，$y(-10^6)\approx -0.999999$，证实了曲线从哪一侧趋近各渐近线。
- 当 $a=1$：$y(0.999)\approx 999$ 及 $y(1.001)\approx 1001$，两者都是很大的正数，与上文所述一致。
- 当 $a\to\infty$ 时，极大点的高度 $\sqrt{a/(a-1)}$ 趋向 1，这是合理的：当 a 极大时，曲线在原点附近近似于 $x/\sqrt{a}$，隆起的部分随之变得平坦。

常见错误

- 在第 (ii) 部分写成 $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$。这样会处处得到 $y=x/(x-1)$，左边的一支因而出错：它会在 $x\to-\infty$ 时趋向 $+1$，并在 $x\to 1^-$ 时趋向 $-\infty$。
- 把曲线两端的渐近线都当作 $y=1$：由于 $\sqrt{x^2}=|x|$，当 $x\to-\infty$ 时极限是 -1。
- 忘记说明当 $a>1$ 时分母永不为零；缺少这一步，“分子只在 $x=a$ 处为零”尚不足以证明恰有一个驻点。

STEP 之外

这个曲线族的性质在 $a=1$ 处突然改变：一条只有一个极大点的光滑曲线，变成了两支分离的曲线，并带有一条铅垂渐近线。研究一个曲线族的定性形状如何随参数而变，正

是分歧理论（bifurcation theory）的起点；而处理 $\sqrt{x^2} = |x|$ 以及 $x \to \pm\infty$ 时的极限所需的那份谨慎，正是大学一年级分析课要严格阐明的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 平易近人，很适合用来了解极限与连续性的严谨处理方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。