详细解答

STEP II 1999，第 6 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 1999，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q6

关键思路

分式 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的导数（derivative）是一个常数除以 $(cx+d)^2$。因此，只要被积函数（integrand）是 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 乘以 $\frac{x+1}{x+3}$ 或 $\frac{x+2}{x+3}$ 的函数，把该分式代换为新变量，就能把 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 完全吸收，余下的最多只是 $\int \ln y \, \mathrm{d}y$。其余两个积分则可由对数定律（laws of logarithms）推出。

解答

导数

由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

分子中含 x 的项互相抵消，只余下一个常数。整道题之所以行得通，关键正在于此。

第一个积分

设 $y = \dfrac{x+1}{x+3}$。这符合 $(*)$ 的形式，其中 $a=1$，$b=1$，$c=1$，$d=3$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{3}$；当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$。利用 $\int \ln y\,\mathrm{d}y = y\ln y - y$（以 $u=\ln y$ 作分部积分法（integration by parts）），可得：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2}\ln y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

其中用到 $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ 和 $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$。这正是题目要求的结果。把这个积分记为 I_1。

一个相伴的积分

> ? **想一想** x^2+3x+2 与我们刚才用过的代换有甚么关系?

它可因式分解为 $(x+1)(x+2)$，所以

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{x+2}{x+3} \qquad \text{及} \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}\Big/\frac{x+2}{x+3}.$$

因此，最后两个积分中的所有对数，都是 $\ln\frac{x+1}{x+3}$ 与 $\ln\frac{x+2}{x+3}$ 的和与差（当 $0\le x\le 1$ 时，这些分式全部为正）。所以我们还需要多计算一个积分：

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

设 $y=\dfrac{x+2}{x+3}$。这次 $a=1$，$b=2$，$c=1$，$d=3$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$，而积分上下限变为 $y=\frac{2}{3}$ 和 $y=\frac{3}{4}$：

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4}\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y\ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4}\\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3}\\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

余下的两个积分

由于 $\ln\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln\frac{x+1}{x+3} + \ln\frac{x+2}{x+3}$，第二个积分是

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12}\\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

由于 $\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$，第三个积分是

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

其中常数项 $-\frac{1}{12}$ 已互相抵消。

验算

- 在 $[0,1]$ 上使用辛普森法则（Simpson's rule），得 $I_1 \approx -0.07352$，$J \approx -0.02878$，而第二和第三个积分分别 ≈ -0.10230 和 -0.04473，全部与精确形式吻合至小数点后十位。
- 粗略估计上下界：$\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$，而 $\ln\frac{x+1}{x+2}$ 介乎 $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$ 与 $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ 之间。所以第三个积分必定介乎约 -0.058 与 -0.034 之间，而 -0.0447 确实在此范围内。
- 每个被积函数在 $[0,1]$ 上都是负数（对数内的每个分式都小于 1），所以三个答案都应该是负数，而事实亦是如此。

常见错误

- 在第一个代换中漏掉因子 $\frac{1}{2}$：该处 $ad - bc = 2$，但在第二个代换中则是 1。
- 没有更改积分上下限，或在代换后仍沿用 x 的上下限 0 和 1。
- 为 $\frac{x+1}{x+2}$ 另作一个新的代换：这样做是可行的，但 $(x+3)^{-2}$ 以 y 表示时会变得相当繁复。把对数拆开要快得多。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 而 $ad - bc \neq 0$ 的映射，称为莫比乌斯变换（*Möbius transformations*）。把两个这样的变换复合，相当于把 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 相乘，而 $ad - bc$ 就是行列式（determinant），这正是它出现在导数中的原因。在复分析（complex analysis）中，它们恰好就是扩充复平面（extended plane）上的全部共形双射（conformal bijections），并把圆和直线映射为圆和直线。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）中有一章对此有十分精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。