详细解答

STEP II 1999，第 5 题

纯数学 · 三角方程

STEP II 1999，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q5

关键思路

有两条自然的路线。一是以 $\cos\alpha$ 为未知数：先把 $\sin\alpha$ 分离出来，两边平方，再利用 $\sin^2+\cos^2=1$ 得出一条关于 $\cos\alpha$ 的二次方程（quadratic equation）。二是把 $5\cos x+12\sin x$ 写成单一余弦 $13\cos(x-\beta)$，这个写法同时说明二次方程的两个根确实都会出现。至于最后一部分，由于余弦在 $[0,\pi]$ 上递减，$\alpha<\frac{3}{4}\pi$ 其实是一个关于 $\cos\alpha$ 的命题。于是问题归结为比较两个根式（surd）的大小。

解答

$\cos\alpha$ 的两个值

设 $c=\cos\alpha$。由方程得 $12\sin\alpha=7-5c$。两边平方，并利用 $\sin^2\alpha=1-c^2$，

$$144(1-c^2)=49-70c+25c^2,$$

$$169c^2-70c-95=0.$$

由二次公式（quadratic formula）得

$$c=\frac{70\pm\sqrt{70^2+4\cdot169\cdot95}}{2\cdot169}=\frac{70\pm\sqrt{69120}}{338}.$$

由于 $69120=576\times120=24^2\times120$，故 $\sqrt{69120}=24\sqrt{120}$。因此

$$\cos\alpha=\frac{35-12\sqrt{120}}{169}\qquad\text{或}\qquad\cos\alpha=\frac{35+12\sqrt{120}}{169},$$

这就是所求的结果，而另一个值是 $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$。

想一想 平方可能会产生增根。这两个值是否真的都来自原方程的解?

是的，而单一余弦的形式正好说明原因。设 β 为满足 $\cos\beta = \frac{5}{13}$ 及 $\sin\beta = \frac{12}{13}$ 的锐角(acute angle)。则

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

所以方程即是 $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$。设 γ 为满足 $\cos\gamma = \frac{7}{13}$ 的锐角，于是 $\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$。方程的解为 $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$，而

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35 \mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

所以两个符号各自给出一个真正的解：$\alpha = \beta + \gamma$ 对应负号，$\alpha = \beta - \gamma$ 对应正号。

第二象限的解

假设 $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$。则 $\cos\alpha < 0$。由于 $\sqrt{120} > 10$，可知 $35 + 12\sqrt{120} > 0$，所以这个根被排除。另外 $12\sqrt{120} > 120 > 35$，所以另一个根是负数。因此

$$\cos\alpha = \frac{35 - 12\sqrt{120}}{169}.$$

余弦在 $[0,\pi]$ 上严格递减（strictly decreasing)。α 和 $\frac{3}{4}\pi$ 都在这个区间内，所以

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此我们须证明 $\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $12\sqrt{120} - 35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$。

想一想 不用计算机，又要避免把可能是负数的量平方，我们怎样比较这些根式的大小?

我们先粗略地估计 $\sqrt{120}$ 的上界（bound)。因为 $120 < 121$，所以 $\sqrt{120} < 11$，于是

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

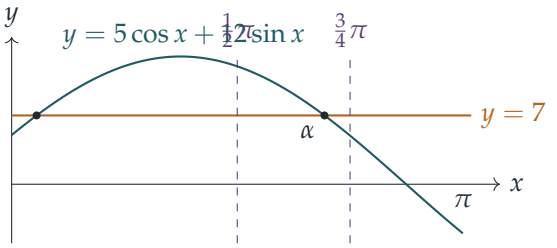
现在只需证明 $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$，即 $97\sqrt{2} < 169$。两边皆为正数，所以这等价于两边平方后的不等式（inequality)：

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

而这是成立的。综合以上各步，

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

又因为余弦在 $[0,\pi]$ 上递减，所以 $\alpha < \frac{3}{4}\pi$，证明完毕。



验算

- 以数值计算，在 $[0, 2\pi)$ 内的根为 $x \approx 0.1738$ 和 $x \approx 2.1782$。它们的余弦值分别是 0.98493 和 -0.57073，与 $(35 \pm 12\sqrt{120})/169$ 吻合。
- 第二象限的根是 2.1782，小于 $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$，正如图像所示。两者相差的余裕相当充足：$\cos\alpha \approx -0.571$，而 $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$。这就是粗略的估计 $\sqrt{120} < 11$ 已经足够的原因。
- 作为对二次方程的合理性检查，两根之积为 $-\frac{95}{169}$，两根之和为 $\frac{70}{169}$。

常见错误

- 没有检查正负号就把不等式两边平方。这里 $12\sqrt{120} - 35$ 和 $169/\sqrt{2}$ 都是正数，但理由应当写明。
- 忘记余弦在 $[0, \pi]$ 上是递减的，因而不等号要反转：$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ 对应的是 $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$。
- 没有解释为何在第二象限中要排除正根。

STEP 之外

最后一部分是严格估计的一个小练习。你把一个难以处理的量换成一个较简单的界，再检查余裕是否仍然足够；分析学（analysis）中许多不等式正是这样证明的。由余弦值推断角的大小这一步，用到了严格单调函数（strictly monotonic function）保持（或反转）次序这个事实，而这正是大学第一门分析课中反函数（inverse function）背后的想法。如想进一步了解如何严谨地处理不等式的证明，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。