详细解答

STEP II 1999，第 4 题

纯数学 · 二项式系数恒等式

STEP II 1999，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q4

关键思路

当两个多项式（polynomial）恒等时，它们各次 x 幂的系数（coefficient）都相同。因此我们选取两个二项展开式（binomial expansion）的乘积，使其 x^n 的系数正好是所求的和，然后从该乘积较简单的形式再计算同一个系数。唯一真正要决定的，是选哪两个因式相乘：把其中一个因式的 x 换成 $-x$，便得到第 (i) 部分所需的正负号；把其中一个因式求导，便得到第 (ii) 部分多出来的 t。

解答

第一个结果

根据二项式定理（binomial theorem），

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

把两个这样的展开式相乘。x^n 项是由第一个括号取 x^s、第二个括号取 x^{n-s} 而得，其中 s 满足 $0 \le s \le n$。所以 $(1+x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数是

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

这里用了对称性 $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$，由阶乘（factorial）公式可清楚看出。在恒等式的另一边，$(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数是 $\binom{2n}{n}$。两个多项式恒等，所以它们 x^n 的系数相等：

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 = \binom{2n}{n}.$$

第 (i) 部分

我们需要正负交替的符号，所以把第一个因式换成 $(1-x)^n = \sum_r \binom{n}{r}(-1)^r x^r$，并使用恒等式（identity）

$$(1-x)^n(1+x)^n \equiv (1-x^2)^n.$$

与之前一样，左边的 x^n 项来自第一个括号的 x^s 和第二个括号的 x^{n-s}，所以 x^n 的系数是

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2.$$

在右边，

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

只含 x 的偶数次幂。由于 n 是偶数，x^n 确实出现，即当 $2k=n$，亦即 $k=n/2$ 时，其系数为 $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$。比较系数，得

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2 = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

正是所求。（同样的论证显示，当 n 是奇数时这个和等于 0，因为此时 $(1-x^2)^n$ 没有 x^n 项。）

第 (ii) 部分

> ? **想一想** 怎样才能令 $\binom{n}{t}$ 旁边出现一个因子 t?

求导（differentiation）便可做到：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t = t\,x^{t-1}$。把二项展开式求导，得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

现在乘以 $(1+x)^n = \sum_u \binom{n}{u}x^u$，并使用恒等式

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n \equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

在左边，x^{n-1} 项来自第一个括号的 $t\binom{n}{t}x^{t-1}$ 乘以第二个括号的 $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$，所以 x^{n-1} 的系数是

$$\sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}^2.$$

在右边，$n(1+x)^{2n-1}$ 中 x^{n-1} 的系数是 $n\binom{2n-1}{n-1}$。最后，

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

所以比较系数后乘以二，得

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

另一方法：有一个巧妙的对称论证。把 t 换成 $n-t$，并利用 $\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$，可见 $\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$。把同一个和的这两个表达式相加，得

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

这是根据第一个结果，而 $t=0$ 的一项为零。

验算

取 $n=4$，此时帕斯卡三角形（Pascal's triangle）的相应一行是 $1,4,6,4,1$。于是 $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$；交错和是 $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$；而 $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$。我们亦已对 39 或以下的每一个 n 精确验证过全部三个恒等式。

常见错误

- 忘记在第 (i) 部分中右边只有偶数次幂，所以正正因为 n 是偶数，x^n 才会出现。
- 在第 (ii) 部分比较了错误的幂：求导之后指数减一，所以我们需要的是 x^{n-1}，而不是 x^n。

STEP 之外

第一个恒等式是范德蒙恒等式（Vandermonde's identity）$\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$ 的特殊情况，后者亦有一个计数证明：从 m 名女士和 n 名男士中选出 k 人，方法是先决定选多少名女士。用多项式作为记录数列的工具，就是*生成函数*（generating functions）的方法，它是组合数学（combinatorics）和概率论中的核心工具。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）全书都使用生成函数，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多这种类型的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。