详细解答

STEP II 1999，第 3 题

纯数学 · 数学归纳法

> **STEP II 1999，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q3

关键思路

不要一次又一次地从头对 e^{-x^3} 求导。应该把第 n 阶导数（derivative）写成 $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$，然后对这个式子再求导一次。这样便得到一个把 S_{n+1} 与 S_n 及 S_n' 连系起来的递推关系（recurrence），而题目的每一部分都可由这一个关系推出：各个多项式（polynomial）的具体形式、归纳法（induction）证明、次数（degree）与首项系数（leading coefficient），以及最后的不等式。

解答

递推关系

根据定义，

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

利用积法则（product rule）再求导一次，

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

再乘以 e^{x^3}，得

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

这对所有 $n \geq 0$ 都成立，其中 $S_0(x) = 1$（第零阶导数就是函数本身）。

S_2 与 S_3

由 $S_0 = 1$ 出发，递推关系给出 $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$，这也可以直接看出。然后

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

正如题目所求。再用一次递推关系，

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

所以

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

归纳法证明

我们证明一个更强的命题，因为这样做不用多花工夫，还能一并回答下一问：

$P(n)$：$S_n(x)$ 是一个次数为 $2n$ 的多项式，其首项系数为 $(-3)^n$。

基础情况。$S_1(x) = -3x^2$ 的次数为 2，首项系数为 $-3 = (-3)^1$，所以 $P(1)$ 成立。（$P(0)$ 亦成立，因为 $S_0 = 1$。）

归纳步骤。假设 $P(k)$ 成立，即

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{其余各项，次数均低于} 2k).$$

多项式的导数仍是多项式，$3x^2 S_k$ 也是多项式，所以 $S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$ 是多项式。至于它的次数，把两部分分开来看：

- S_k' 的次数至多为 $2k - 1$；
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{较低次项}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$。

> ? **想一想** S_k' 会不会把 $-3x^2 S_k$ 的最高次项抵消掉?

不会：S_k' 的次数至多为 $2k - 1$，远低于 $2k + 2$，所以它碰不到 x^{2k+2} 这一项。因此 S_{k+1} 的次数恰好是 $2k + 2 = 2(k + 1)$，首项系数为 $(-3)^{k+1}$（非零）。这正是 $P(k + 1)$。

由归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。所以 $S_n(x)$ 是一个阶（即次数）为 $2n$ 的多项式，而 x^{2n} 的系数为 $(-3)^n$。这与 S_2（$9 = (-3)^2$，次数为 4）及 S_3（$-27 = (-3)^3$，次数为 6）吻合。

最后一部分

假设 $S_n'(a) = 0$。在递推关系中代入 $x = a$，导数项便消失：

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

因此

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \le 0,$$

因为 $a^2 \ge 0$ 且 $\big(S_n(a)\big)^2 \ge 0$。等号成立当且仅当 $a = 0$ 或 $S_n(a) = 0$。证明至此完成。

验算

- 首项：S_3 应以 $(-3)^3 x^6 = -27x^6$ 开首，事实确是如此。
- S_3 的常数项：在 $x = 0$ 附近，$\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$，所以它在 0 处的第三阶导数是 $-3! = -6$。这与 $S_3(0) = -6$ 相符。
- 一个驻点（stationary point）：$S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$ 在 $x = 1$ 处为零。在该点 $S_3(1) = 21$ 而 $S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$，所以乘积为 $-1323 \le 0$。
- 我们亦在三十个随机有理数点 a 上，把 $S_0, \ldots, S_9$ 与 $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$ 的精确泰勒级数（Taylor series）作了对照，并在 $[-4, 4]$ 内 $S_1, \ldots, S_8$ 的每一个驻点上检验了该不等式。

常见错误

- 忘记说明为何次数恰好是 $2n + 2$。你需要首项系数非零，并且 S_k' 无法把它抵消，这就是为甚么值得把首项系数一并放进归纳假设之中。
- 只证明“S_n 是多项式”，然后凭规律猜出次数。题目要求你从归纳论证本身得出次数。

STEP 之外

这里的多项式是埃尔米特多项式（Hermite polynomials）的近亲，后者是用同一技巧对 e^{-x^2} 定义的（即所谓“罗德里格斯公式”（Rodrigues formula））。它们满足与我们这里相似的递推关系，并出现于概率论和量子谐振子（quantum harmonic oscillator）之中。最后的不等式让我们初次窥见，这类递推关系如何支配一整族多项式的零点和转向点（turning point）的位置。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）在讨论级数解的一章中会遇到埃尔米特方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。