详细解答

STEP II 1999，第 2 题

纯数学 · 二次方程的判别式

> **STEP II 1999，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q2

关键思路

一切取决于 $(*)$ 的判别式（discriminant）。由于 x 的系数带有因子 2，四分之一判别式 $\frac{1}{4}(b^2-4ac)$ 特别简洁，而且它原来是 n 的二次式（quadratic）。于是每一部分都变成关于另一个二次式的正负号的问题，这次以 n 为变量。

解答

全篇我们都假设 $pn^2+q\geq 0$，使平方根为实数，而 $(*)$ 是一个系数为实数的普通二次方程。（在第 (i) 及第 (iii) 部分，由于 $q>0$ 或 $q\geq 0$，这个条件自动成立。）取 $a=n$、$b=2\sqrt{pn^2+q}$ 及 $c=rn+s$，方程有实根（real roots）当且仅当 $b^2-4ac\geq 0$，即 $\frac{1}{4}b^2-ac\geq 0$。现在

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}b^2-ac&=(pn^2+q)-n(rn+s)\\&=(p-r)n^2-sn+q.\end{aligned}$$

设 $f(n)=(p-r)n^2-sn+q$。则

$$(*)\text{ 没有实根}\iff f(n)<0.$$

第 (i) 部分

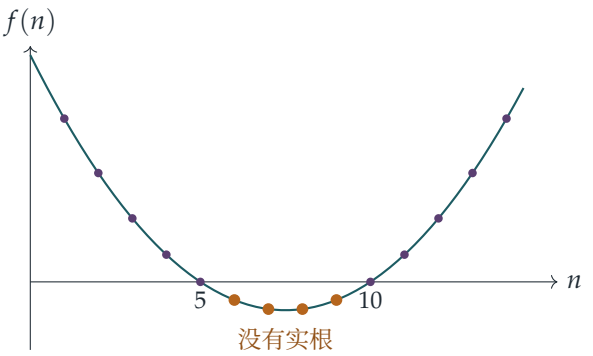
这里 $p-r=1$，所以

$$f(n)=n^2-15n+50=(n-5)(n-10).$$

它为负数当且仅当 $5<n<10$。由于 n 是正整数，$(*)$ 没有实根的情况恰好是

$$n\in\{6,7,8,9\}.$$

当 $n = 5$ 及 $n = 10$ 时，$f(n) = 0$，方程有一个实数重根（repeated root），所以这两个值不包括在内。



第 (ii) 部分

现在 $p < r$，所以 f 的首项系数（leading coefficient）$p - r$ 为负数。把 f 看成实变量 t 的二次式：

$$f(t) = (p - r)t^2 - st + q.$$

它的判别式是

$$s^2 - 4(p - r)q,$$

根据假设 $4q(p - r) > s^2$，这个判别式为负数。

想一想 为甚么 f 的判别式为负数，能告诉我们 $f(n)$ 的正负号?

判别式为负数的二次式没有实零点，所以它的图像永不穿过横轴，对所有实数 t 都保持同一个正负号。首项系数为负数时，图像是一条开口向下的抛物线（parabola），所以这个符号是负号。具体来说，用配方法（completing the square），

$$f(t) = (p - r)\Big(t - \frac{s}{2(p - r)}\Big)^2 + \frac{4q(p - r) - s^2}{4(p - r)},$$

两项都是负数或零：第一项是因为 $p - r < 0$，第二项是因为其分子为正数而分母为负数。第二项严格小于零，所以对每一个实数 t 都有 $f(t) < 0$。

特别地，对每一个正整数 n 都有 $f(n) < 0$，所以无论 n 取甚么值，$(*)$ 都没有实根，这正是所要证明的。

留意这些假设必然导致 $q < 0$：由于 $p - r < 0$ 而 $4q(p - r) > s^2 \geq 0$，q 必定是负数。因此当 n 较小时，$pn^2 + q$ 确实可以是负数，而我们一直沿用的“平方根为实数”这个假设在这里就很重要。（假如容许系数为虚数，$x = 0$ 便有可能是根：试试 $p = 1$、$r = 2$、$s = -2$、$q = -10$、$n = 1$。）

第 (iii) 部分

现在 $n=1$、$p-r=1$ 及 $q=s^2/8\geq 0$，所以 $p+q>0$，各系数均为实数。这里

$$f(1)=1-s+\frac{s^2}{8}=\frac{s^2-8s+8}{8}.$$

方程有实根当且仅当 $f(1)\geq 0$，亦即当且仅当

$$s^2-8s+8\geq 0.$$

$s^2-8s+8=0$ 的根是

$$s=\frac{8\pm\sqrt{64-32}}{2}=4\pm 2\sqrt{2},$$

所以 $s^2-8s+8=\big(s-(4-2\sqrt{2})\big)\big(s-(4+2\sqrt{2})\big)$。这个乘积非负，当且仅当 s 位于两根之间的开区间（open interval）之外。因此 $(*)$ 有实根当且仅当

$$s\leq 4-2\sqrt{2}\quad\text{或}\quad s\geq 4+2\sqrt{2},$$

这正是所要证明的。每一步都是可逆的，“当且仅当”的两个方向正是由此而来。在两个端点处，方程的根是重根。

验算

- 在 (i) 中，取 $n=7$：$\frac{1}{4}b^2=3\cdot 49+50=197$ 而 $ac=7\cdot 29=203$，所以 $\frac{1}{4}b^2-ac=-6<0$。取 $n=11$：$413-11\cdot 37=6>0$。
- 在 (iii) 中，$4-2\sqrt{2}\approx 1.1716$ 而 $4+2\sqrt{2}\approx 6.8284$。取 $s=4$，得 $f(1)=1-4+2=-1<0$，它位于两根之间的空隙内，与预期相符。
- 我们用电脑就 (i) 搜索了由 1 至 199 的 n，就 (ii) 测试了约 5 百万个随机情况，并就 (iii) 测试了 10^5 个随机的 s 值。全部结果都与上文一致。

常见错误

- 在 (i) 中把 $n=5$ 及 $n=10$ 也包括在内。这时判别式为零，所以方程有一个（重复的）实根。
- 在 (ii) 中只验证 n 很大时 $f(n)<0$。判别式条件的要点，正在于 f 处处为负数，包括 n 较小的时候。
- 忘记了 x 的系数中的因子 2，结果在判别式中把 $4(pn^2+q)$ 放错了位置。

STEP 之外

这里的做法，是把参数（parameter）当作新的变量，再考虑以它为变量的二次式的正负号；这正是研究多项式的根如何随系数变化的起点。在大学，这会引伸到高次多项式的判别式，以及这样的一个概念：二次型（quadratic form）$at^2 + bt + c$ 是负定（negative definite）的，当且仅当 $a < 0$ 且 $b^2 < 4ac$。同一个判别法用于两个变量时，可以为多元函数的驻点（stationary points）分类。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）中还有很多建基于严谨判别式论证的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。