详细解答

STEP II 1999，第 11 题

力学 · 抛体与移动目标

STEP II 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q11

关键思路

目标始终留在圆上，所以炮弹必须落在水平面上与 O 相距恰好 R 之处；而炮总可以转向，对准目标届时所在的位置。因此一切归结为同一个抛体（projectile）的两项事实：它的射程（range）和飞行时间（time of flight）。转过的角为 $\beta = \omega T$，再利用 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 消去 α，便得到那个四次方程（quartic）。最后一部分则是韦达定理（Vieta's formulas）加上圆的一条弦（chord）。

解答

我们把炮弹视为只受重力作用的质点（particle）（不计空气阻力），从圆所在水平面上的 O 点发射，其中 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$。

第 1 部分：当 $V^2 < gR$

取坐标轴分别沿地面（在发射所在的平面内）及铅垂向上。在时间 t，

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

炮弹回到水平面（$y = 0$，$t > 0$）的时间为

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{此时水平距离为} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

由于 $\sin 2\alpha \le 1$，无论在哪一个铅垂面内发射，炮弹的落点与 O 的距离都不超过 V^2/g。目标始终在水平面上与 O 相距 R 之处，所以要命中就必须有 $R \le V^2/g$，即 $V^2 \ge gR$。因此若 $V^2 < gR$，炮弹永远不能击中目标，这正是所要证明的。

第 2 部分：β 所满足的方程

现设 $V^2 > gR$。炮弹在时间 T、距离 R 处击中目标，所以

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

目标以恒定角速率 ω 转动，所以 $\beta = \omega T$，由此得

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

把它代入射程的方程，

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

于是由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 得

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

全式乘以 $4V^2\omega^2\beta^2$，得

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

这就是所求的方程。

? **想一想** 为甚么恰好有两个值，而不是最多四个，或者一个也没有?

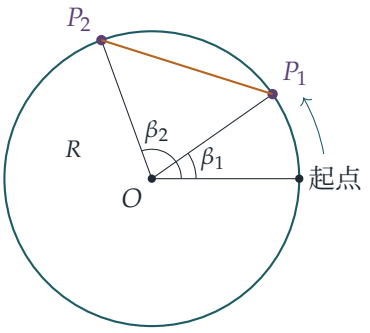
把它看成 β^2 的二次方程，其判别式（discriminant）为

$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4(V^4 - g^2R^2) > 0,$$

因为 $V^2 > gR$。所以 β^2 有两个相异的实数值。它们的和 $4\omega^2V^2/g^2$ 与积 $4R^2\omega^4/g^2$ 都是正数，所以 β^2 的两个值都是正数。角 $\beta = \omega T$ 是正数，所以 β^2 的每个值恰好对应一个 β，于是我们恰好有两个候选值 $\beta_1 < \beta_2$。

每一个候选值都确实对应一次命中。对任何一个根，$g\beta/(2V\omega)$ 和 $R\omega/(V\beta)$ 这两个数都是正数，而且（根据该方程）它们的平方和为 1，所以存在 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，以这两个数分别作为其正弦和余弦。以这个仰角（elevation），在通过目标转过 β 后所到达之点的铅垂面内发射，飞行时间便是 β/ω，射程便是 R，所以炮弹与目标相遇。因此 β 恰好有两个可能的值。（它们对应于射程同为 R 的两个互余仰角 α 和 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$。）

第 3 部分：距离 P_1P_2



两个弹着点都在圆上，从发射一刻目标所在的位置起按逆时针方向量度，所对的角分别为 β_1 和 β_2。所以角 P_1OP_2 为 $\beta_2-\beta_1$（如有需要可按模 2π 化简，这不影响弦长），而由等腰三角形 OP_1P_2 得

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right|.$$

由 β^2 的二次方程，

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

又因为 $\beta_1,\beta_2>0$，可以取正平方根：$\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$。因此

$$\begin{aligned}(\beta_2-\beta_1)^2 &= \beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2}-\frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}\left(V^2-Rg\right),\end{aligned}$$

所以 $\beta_2-\beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}$。故此

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\right),$$

这正是所要证明的。（严格来说，这需要该正弦值非负，即 $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\le\pi$；否则距离是这个式子的绝对值。）

验算

- 当 $V^2\to gR^+$ 时，两个仰角都趋向 45°，所以 P_1 和 P_2 应该重合：公式的值确实趋向 0。
- 直接验证 $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$：$\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2$，而代入 $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi-\alpha_1$ 后，这等于 $(2V\omega/g)^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$，与预期相符。
- 数值上，取 $g=9.8$、$R=10$、$V=14$、$\omega=0.3$（国际单位制），逐步计算两条轨迹，得出弦长约为 5.97 m，与 $20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right)\approx 5.969$ 吻合。

常见错误

- 忘记了炮可以对准任何一个铅垂面：第一部分只关乎射程，与目标碰巧身在何处无关。
- 对 $\beta_1^2\beta_2^2$ 开平方，却没有说明为甚么 $\beta_1\beta_2$ 是正数。
- 写成 $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$，这是弧长，而不是直线距离。

STEP 之外

击中移动中的目标，是一个小型的追踪（pursuit）或拦截（interception）问题：先求出命中的时间，再求出瞄准的方向。在两条方程之间消去一个参数而得到一个多项式，然后不必解它，直接从系数读出所需的资料，这种技巧你在大学里会经常用到。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种严谨的态度处理抛体和转动运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。