详细解答

STEP II 1999，第 10 题

力学 · 连续碰撞

STEP II 1999，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q10

关键思路

这条链上的每一次碰撞（impact）都是同一个模样：一个质量为 μ、以速率 u 运动的粒子（particle），撞上一个质量为 $q\mu$ 的静止粒子。因此，只要把第一次碰撞的计算按比例缩放，就能描述每一次碰撞。一旦知道每个粒子的最终速度，会否出现额外碰撞的问题，就归结为比较相邻粒子的最终速度；而当 $q = e$ 时，各个速度变得非常简单，能量损失不过是一个等比级数（geometric series）。

解答

第一次碰撞

把各粒子视为沿直线运动的质点（point mass），并取由 P_1 指向 P_2 的方向为正。设 v_1 和 v_2 分别为 P_1 和 P_2 刚碰撞后的速度。由动量守恒（conservation of momentum）及牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）得

$$\begin{aligned} mV &= mv_1 + qm\,v_2, \\ v_2 - v_1 &= eV. \end{aligned}$$

把 $v_2 = v_1 + eV$ 代入第一条方程，得 $V = v_1 + qv_1 + qeV$，所以

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

正如所求。

每一次碰撞都是同一个模样

记

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

上面的计算完全没有用到 m 的实际数值：一个质量为 μ、以速度 u 运动的粒子，撞上一个质量为 $q\mu$ 的静止粒子后，自己以速度 αu 离开，并使对方以速度 βu 弹出。由于每个 P_{k+1} 的质量都是 P_k 的 q 倍，所以只要 P_k 撞上 P_{k+1} 时 P_{k+1} 仍然静止，这个结果便适用。

当 $q \le e$ 时恰好有 $N-1$ 次碰撞

假设 $q \le e$。那么 $eq \le e^2 < 1$，所以 $\alpha > 0$；另外亦有 $\beta > 0$。

沿着这条链逐一追踪。P_1 撞上 P_2，碰撞后 P_1 的速度为 αV，P_2 的速度为 βV。由于 $\beta V > 0$，P_2 朝着静止的 P_3 运动并撞上它；碰撞后 P_2 的速度为 $\alpha\beta V$，P_3 的速度为 $\beta^2 V$。如此类推，P_k 以速度 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$ 到达静止的 P_{k+1}，所以每一对相邻粒子之间都有一次碰撞：即最少有 $N-1$ 次碰撞。这些碰撞之后，各粒子的速度为

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

这些速度全部为正，所以所有粒子都朝同一方向运动。

> **想一想** 我们怎样知道 P_k 永远不会再追上 P_{k+1}?

两者碰撞之后，P_k 从此以恒定速度 w_k 运动，因为它往后唯一可能接触到的只有 P_{k+1} 或 P_{k-1}。与此同时，P_{k+1} 在撞上 P_{k+2} 之前以 $u_{k+1} = \beta^k V$ 运动，之后则以 w_{k+1} 运动（若 $k+1 = N$，则永远保持前者）。P_k 与 P_{k+1} 之间的距离只有在 P_k 运动得较快时才会缩小，而：

- $u_{k+1} > w_k$，因为 $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$ 等价于 $\beta > \alpha$，即 $1+e > 1-eq$，而这是成立的；
- 对于 $k \le N-2$，有 $w_{k+1} \ge w_k$，因为 $w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$，而这正正是因为 $q \le e$；
- 对于 $k = N-1$，有 $w_N > w_{N-1}$，因为 $w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$。

所以在两者碰撞之后，P_{k+1} 永远不会比 P_k 慢，两者之间的距离永不缩小。（当 $q = e$ 时我们得到 $w_{k+1} = w_k$：距离保持不变，但不会缩小至零。）这对每一对相邻粒子都成立，所以不会再有其他碰撞，碰撞次数恰好是 $N-1$ 次。

这就是 $q \le e$ 这个条件发挥作用的地方。假如 $q > e$，则 $\beta < 1$，每个粒子最终都比它后面的那个慢，这条链便会自己追上自己，产生更多碰撞。

当 $q = e$ 时损失的动能

现在 $q = e$，所以

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

每个粒子都是被速率为 V 的粒子撞上；碰撞之后 $P_1, \dots, P_{N-1}$ 以 $(1-e)V$ 运动，而 P_N 以 V 运动。由于 P_k 的质量为 $e^{k-1}m$，最终的动能（kinetic energy）为

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

当中用了等比级数求和 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$。最初的动能为 $\frac{1}{2}mV^2$，所以损失为

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left(1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

验算

- 逐次碰撞计算。当 $q = e$ 时，P_k 撞上 P_{k+1} 这次碰撞使 P_k 的速度由 V 变为 $(1-e)V$，使 P_{k+1} 的速度由 0 变为 V，损失的动能为 $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$。对 $k = 1, \dots, N-1$ 求和，得 $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$，答案相同。
- 极限情况。当 $e \to 0$ 时，损失趋向 0；事实上，当 $q = e \to 0$ 时，后面各粒子的质量小得可以忽略。取 $N = 2$，公式给出 $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$，与直接计算单一次碰撞的结果吻合。
- 数值检验。我们随机选取 $N \le 12$、随机的间距和随机的 $q \le e$，逐个事件地模拟整个运动，每次都恰好得到 $N-1$ 次碰撞。当 $N = 5$、$q = e = \frac{1}{2}$、$m = V = 1$ 时，模拟得出的损失为 $0.234375 = \frac{15}{64}$，与 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$ 一致。

常见错误

- 只检查了首 $N-1$ 次碰撞确实发生。“恰好”二字还需要论证：往后没有任何粒子会追上它前面的那一个。

- 把 P_k 的最终速度与 P_{k+1} 刚碰撞后的速度（βu_k）比较，而不是与它撞上 P_{k+2} 并减慢之后的最终速度比较。
- 弄错恢复定律中的正负号：等于 e 乘以接近速率的，是分离速率 $v_2 - v_1$。

STEP 之外

一串质量逐个把动量传递下去的粒子链，是冲击波（shock）在颗粒物料中传播的一维模型。质量稳定递减的链，例如本题中 $q < 1$ 的情况，是物理学家研究的对象，用来分散和吸收冲击。要重新整理能量的计算，有一个漂亮的方法，就是利用约化质量（reduced mass）$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$：一次碰撞损失 $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)w^2$，其中 w 是接近速率。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）在质心参考系（centre-of-mass frame）中讨论碰撞，在那里这类结果变得一目了然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。