详细解答

STEP II 1999，第 1 题

纯数学 · 大数的比较

STEP II 1999，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q1

关键思路

这些数大得根本无法直接比较，就连它们的对数（logarithm）也大得无从入手。突破口是取 $\log_{10}$ 两次。由于 x、y 和 z 各自都是 10 的幂，每个双重对数（double logarithm）都会化为 100、x 和 y 的简短的和，而这些和很容易比较。因为 $\log_{10}$ 是递增的，比较双重对数就等于比较原来的数。

解答

全文以 log 表示 $\log_{10}$，并记

$$L(a) = \log(\log a).$$

函数 $t \mapsto \log t$ 是严格递增（strictly increasing）的，所以对于 $a, b > 10$ 的数（此时 $\log a, \log b > 1 > 0$），$a < b$ 当且仅当 $L(a) < L(b)$。我们用到的基本事实是

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^{x}.$$

第 (i) 部分

在斯特灵近似公式（Stirling's approximation）中取 $n = x$，再取 $\log_{10}$，得

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e} \\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi} \\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

现在 $\log \mathrm{e} \approx 0.434$，而常数 $50.4\ldots$ 与 $x = 10^{100}$ 相比完全可以忽略。所以

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

我们对每个数先计算 $\log a_i$，再计算 $L(a_i)$。

- $a_2 = x^y$：　$\log a_2 = y \log x = 100y$，所以 $L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$。
- $a_3 = y^x$：　$\log a_3 = x \log y = x^2 = 10^{200}$，所以 $L(a_3) = 200$。
- $a_4 = z^x$：　$\log a_4 = x \log z = xy$，所以 $L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$。
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$：　$\log a_5 = xyz \log \mathrm{e}$，所以

$$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  因为 $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$。
- $a_6 = z^{1/y}$：　$\log a_6 = \frac{1}{y} \log z = 1$，所以 $a_6 = 10$，这是精确值。
- $a_7 = y^{z/x}$：　$\log a_7 = \frac{z}{x} \log y = \frac{z}{x} \cdot x = z$，所以 $L(a_7) = \log z = y$。

连同第 (i) 部分得到的 $L(a_1) \approx 102$，各个双重对数为

$$\underbrace{0}_{a_6},\ \underbrace{102}_{a_1},\ \underbrace{200}_{a_3},\ \underbrace{x+2}_{a_2},\ \underbrace{x+100}_{a_4},\ \underbrace{y}_{a_7},\ \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

> ? **想一想** 第 (i) 部分只给出了 a_1 的近似值。这样足以确定它的位置吗?

足够，而且我们甚至不需要用到斯特灵公式。$x!$ 的 x 个因子每个都不超过 x，所以 $x! \le x^x$，并且 $\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$，由此得 $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$。另外，$a_1 = x! > 10 = a_6$ 是显然的。所以 $a_6 < a_1 < a_3$ 严格成立。

现在我们逐一说明余下的比较。

- $a_3 < a_2$：$200 < 10^{100} + 2$。
- $a_2 < a_4$：$x + 2 < x + 100$。
- $a_4 < a_7$：我们需要 $x + 100 < y = 10^x$。这个不等式成立，而且相差极其悬殊，因为对于每个 $t \ge 3$ 都有 $10^t > t + 100$，而这里 $t = x = 10^{100}$。
- $a_7 < a_5$：$y < y + x + 99.6$，因为 $x + 99.6 > 0$。（直接来看：$\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$ 而 $xy \log \mathrm{e} > 1$，所以 $\log a_5 > z = \log a_7$。）

除 a_6 以外，所有数都大于 10，所以 L 的单调性（monotonicity）适用，而大小次序为

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

验算

对于第 (i) 部分，我们取 $n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$，把斯特灵公式与 $\log_{10} n!$ 的精确值（通过对数伽玛函数（log-gamma function）求得）作比较。a_1 的双重对数公式与精确值相差不超过 10^{-6}，而当 $n = 10^{100}$ 时，公式给出 101.998。对于第 (ii) 部分，我们取 $x = 10^k$，其中 $k = 2, 3, 4$，把整个计算重做一遍，这时 $y = 10^x$ 可以作为整数精确地储存。每次都得出相同的次序 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$，所以这个次序并不取决于 100 这个数的大小。

常见错误

- 只比较单重对数，然后迷失方向：$\log a_7 = z$ 和 $\log a_4 = xy$ 仍然太大，无法凭肉眼比较。要再取一次对数。
- 把 e^{xyz} 转换为以 10 为底时，忘记了因子 $\log \mathrm{e}$。在这里它几乎没有影响，但确实会令 $L(a_5)$ 偏移约 0.36。
- 没有留意到 a_6 其实就是 10，是所有数中最小的。

STEP 之外

迭代对数（iterated logarithm）和指数塔在分析学和计算机科学中用来量度增长。例如，迭代对数 $\log^* n$ 出现在某些算法的运行时间中，而“塔”函数则在拉姆齐理论（Ramsey theory）中用作结果的界。斯特灵公式本身是一个渐近级数（asymptotic series）的首项，而严谨地证明它是大学一年级分析课的经典习题。想熟习当中涉及的极限和不等式，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。