详细解答

STEP I 1999，第 9 题

力学 • 匀速率运动学

STEP I 1999，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

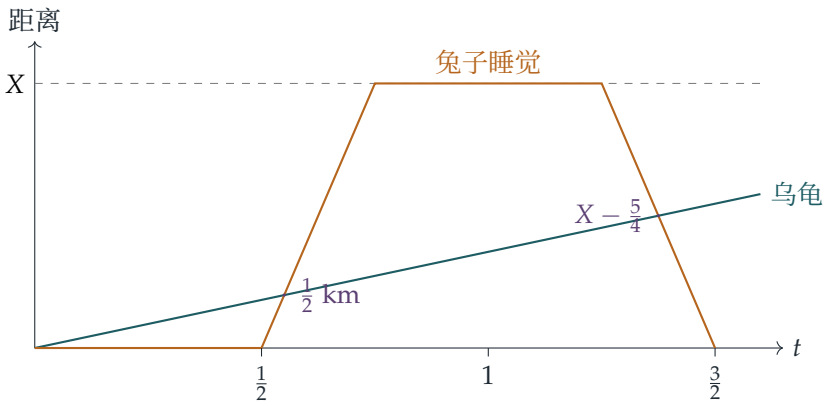
step.maths.org/questions/99-s1-q9

关键思路

所有运动都以恒定速率进行，所以每段路程所需的时间就是距离除以速率。两只动物每次相遇时，都是在同一时刻身处同一位置，因此我们分别写出牠们各自在该刻的时钟时间，再令两者相等。两次相遇给出两条关于 v 和 V 的方程。改用 $1/v$ 和 $1/V$（每公里所需的小时数）来运算，方程便保持线性（linear）。

解答

我们把两只动物都看成沿同一条直线路径以恒定速率（constant speed）运动，并忽略转身所需的时间。时间 t 以小时为单位，由起步一刻开始计算。下面的距离—时间图（distance–time graph）（按最后求得的 X 值绘画）显示了我们用到的两个交点。



第一次相遇

乌龟在时间 $\dfrac{1/2}{v}$ 到达距离起点 $\frac{1}{2}$ km 的位置。兔子在 $t=\frac{1}{2}$ 起步，并在时间 $\frac{1}{2}+\dfrac{1/2}{V}$ 到达同一位置。牠们同时身处该处，所以

$$\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2V},\qquad \text{即}\qquad \frac{1}{v}=1+\frac{1}{V}. \tag{1}$$

第二次相遇

兔子在时间 $\frac{1}{2}+\dfrac{X}{V}$ 到达菜园，睡了半小时，然后在 $1+\dfrac{X}{V}$ 离开。接着牠往回跑了 $\frac{5}{4}$ km，所以牠与乌龟相遇的时间是

$$1+\frac{X}{V}+\frac{5}{4V}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}.$$

乌龟此时仍在去程途中，距离起点 $X-\frac{5}{4}$ km，所以牠已经走了 $\dfrac{X-\frac{5}{4}}{v}$ 小时。令两个时间相等：

$$\frac{X-\frac{5}{4}}{v}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

? **想一想** 我们有两条方程和两个未知数，但 (2) 式中 $1/v$ 与 X 相乘。怎样才可以单独求出 V?

我们把 (1) 代入 (2)。这样 X/V 的项便会互相抵消，V 的结果因而如此简洁：

$$\begin{aligned}\left(X-\tfrac{5}{4}\right)\left(1+\frac{1}{V}\right)&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{5}{4}+\frac{X-\frac{5}{4}}{V}&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{9}{4}&=\frac{5/2}{V}.\end{aligned}$$

因此

$$V=\frac{5/2}{X-\frac{9}{4}}=\frac{10}{4X-9},$$

正如所求。（要使这个速率为正数，我们需要 $X>\frac{9}{4}$，在最后一部分要记住这一点。）

然后由 (1) 得

$$\frac{1}{v}=1+\frac{4X-9}{10}=\frac{4X+1}{10},\qquad \text{所以}\qquad v=\frac{10}{4X+1}.$$

求 X

兔子在 $1+\dfrac{X}{V}$ 离开菜园，再用 $\dfrac{X}{V}$ 小时回到家，所以牠在 $1+\dfrac{2X}{V}$ 完成全程。令这个时间等于 $\frac{3}{2}$，得 $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$，所以 $V=4X$。于是

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10 &= 0 \\ 8X^2-18X-5 &= 0 \\ (2X-5)(4X+1) &= 0. \end{aligned}$$

根 $X=-\frac{1}{4}$ 不可能是距离（况且我们需要 $X>\frac{9}{4}$），所以

$$X=\tfrac{5}{2}\text{ km}.$$

取这个值时，兔子的速率是 $V=10\,\text{km/h}$，乌龟的速率是 $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$。

验算

把 $X=\frac{5}{2}$、$V=10$、$v=\frac{10}{11}$ 代回故事之中。乌龟在 $t=0.55$ 到达 $\frac{1}{2}\,\text{km}$ 处，而兔子在 $t=0.5$ 起步，需要 0.05 h 才到达该处：牠们相遇。兔子在 $t=0.75$ 到达菜园，并在 $t=1.25$ 离开。牠在 $t=1.375$ 到达距离菜园 1.25 km 的位置（亦即距离起点 1.25 km），而乌龟到达 1.25 km 处的时间是 $1.25\times 1.1=1.375$：牠们再次相遇。兔子回到家的时间是 $1.25+0.25=1.5$。把任意选取的 $X>\frac{9}{4}$ 的值代入 V 和 v 的公式，再重演整场比赛，同样会得到相遇位置完全正确的结果。

常见错误

- 写兔子的时钟时间时，漏掉了牠其中一次半小时的睡眠，尤其是在菜园的那一次。
- 把第二个相遇点当成距离起点 $\frac{5}{4}\,\text{km}$，而不是距离菜园。
- 把二次方程（quadratic equation）的两个根都保留：负的距离必须舍去，并要说明理由。

STEP 之外

像上面那样的距离—时间图，把一道文字题转化为直线在何处相交的问题，这正是任何力学课程中运动学（kinematics）的起点。这里改用速率的倒数（配速，pace）来运算，

使方程变成线性；选取能把问题线性化（linearise）的变量，是应用数学中反复出现的技巧。若想看看由这些想法发展出来的大学一年级程度运动理论，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。