详细解答

STEP I 1999，第 8 题

纯数学 · 调和级数的界限

STEP I 1999，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q8

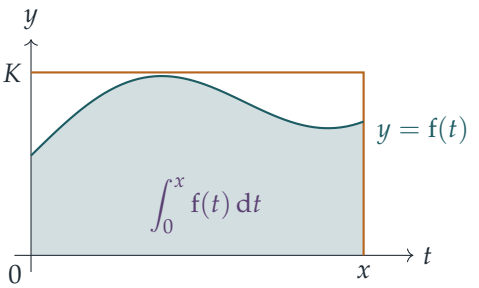
关键思路

积分就是面积，所以把曲线困在一个长方形之内，它的面积便被夹在 0 与长方形的面积之间。题目建议的被积函数（integrand）可用部分分式（partial fractions）拆开，其积分恰好等于 $\ln(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}$，而被积函数的上下界便给出所求的不等式。之后一切都会裂项相消（telescope）：对 n 求和，一连串的对数化为 $\ln N$，一连串的倒数之差则几乎全部消去。

解答

估计积分的上下界

绘出 $y = \mathrm{f}(t)$ 在 $0 \le t \le x$ 的图像。由于 $0 \le \mathrm{f}(t) \le K$，整条曲线位于以 $(0,0)$ 和 (x,K) 为顶点的长方形之内，并且在 t 轴上或其上方。



积分就是曲线下方阴影部分的面积。这面积不可能是负数，因为曲线从不跌到轴的下方；它也不可能超过长方形的面积 Kx，因为该区域完全位于长方形之内。所以

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le Kx.$$

关于 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ 的不等式

取 $n > 1$。当 $0 \le t \le 1$ 时，$n - t \ge n - 1 > 0$，所以被积函数有定义。把它拆成部分分式，

$$\frac{t}{n(n-t)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(n-t)}{n-t} = \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(n-t) - \frac{t}{n}\Big]_0^1 = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n}.$$

现在估计被积函数在 $[0,1]$ 上的上下界。分子 t 非负，分母 $n(n-t)$ 为正，所以被积函数至少为 0。当 t 由 0 增加至 1 时，分子增大而正的分母减小，所以被积函数是递增的，其最大值在 $t = 1$ 处取得：

$$0 \le \frac{t}{n(n-t)} \le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

在第一个结果中取 $x = 1$ 及 $K = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$，得

$$0 \le \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

这正是所求。

由 $n = 2$ 求和至 N

把 $n = 2, 3, \ldots, N$（其中 $N \ge 2$）的不等式相加。对数部分会裂项相消，因为

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1}\Big) = \ln N,$$

右边各项亦然：

$$\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) = 1 - \frac{1}{N}.$$

因此

$$0 \le \ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le 1 - \frac{1}{N} \le 1.$$

（当 $N = 1$ 时，和式为空，而 $\ln 1 = 0$，所以命题此时同样成立。）

> **想一想** 这个双重不等式的哪一半告诉我们调和级数（harmonic series）发散（diverge），哪一半给出上界？

左半说明该和至多为 $\ln N$；右半说明它至少为 $\ln N - 1$。要证明发散，我们需要下界，所以用右半。

发散

由 $\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le 1$ 可得 $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \ge \ln N - 1$，再加上 $n = 1$ 的一项，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge \ln N.$$

由于当 $N \to \infty$ 时 $\ln N \to \infty$，该和亦趋向无穷大。

$N < 10^{30}$ 时的上界

现在用左半：$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le \ln N$，所以

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \le 1 + \ln N.$$

由于 $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$，两边取十次方得 $10^{30} < 2^{100}$。所以若 $N < 10^{30}$，则 $N < 2^{100}$，而 ln 是递增函数，故

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

这里用到 $\ln 2 < 1$，它成立是因为 $2 < \mathrm{e}$。因此

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \le 1 + \ln N < 101.$$

验算

- 对多个 $n > 1$ 的值，以辛普森法则（Simpson's rule）计算 $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$，结果都与 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$ 吻合。例如当 $n = 2$ 时，两者都给出 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$，它介乎 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。
- 对每个不超过 2×10^5 的 N，$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$ 都落在 $[0, 1]$ 内。当 $N = 2 \times 10^5$ 时，它约为 0.4228，接近 $1 - \gamma \approx 0.4228$，其中 γ 是欧拉常数（Euler's constant）。
- 这个上界相当宽松：$1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$，而事实上 $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$。调和级数确实发散，但发散得极其缓慢。

常见错误

- 用错双重不等式的一半：证明发散需要该和的下界，而最后一部分需要上界。
- 遗漏 $n = 1$ 的一项：不等式所涉及的是 $\sum_{n=2}^{N}$，而结论所涉及的是 $\sum_{n=1}^{N}$。
- 没有说明为何被积函数的最大值在 $t = 1$ 处取得。只需指出它是递增的（或直接指出 $t \le 1$ 及 $n - t \ge n - 1$）便已足够。

STEP 之外

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$ 这个量是递减的，并且有下界，所以它收敛（converge）。它的极限是欧拉常数 $\gamma \approx 0.5772$，而至今仍无人知道 γ 是否有理数。像我们在这里所做的那样，把和式与积分作比较，就是*积分判别法*（integral test），它是大学一年级分析课程中处理级数的首批工具之一。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是了解其严格论证的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。