详细解答

STEP I 1999，第 7 题

纯数学 · 二阶微分方程

STEP I 1999，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q7

关键思路

函数 $\sin(k\sin^{-1}x)$ 看来很难求两次导数，但只要设 $x=\sin\theta$，使 $y=\sin k\theta$，它就变得易于处理。先把一阶导数（first derivative）乘以 $\sqrt{1-x^2}$ 再求导，可令代数运算保持简短。至于最后一部分，重点在于：一个二阶微分方程（second-order differential equation）若在某一点给定了函数值和斜率，就只有一个解，所以我们求得的多项式必定是 $\sin(3\sin^{-1}x)$。

解答

微分方程

设 $y=\sin(k\sin^{-1}x)$，其中 $-1<x<1$。根据链式法则（chain rule），并利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \text{所以}\qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

把第二个式子对 x 求导（左边用积法则（product rule），右边用链式法则）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$（当 $-1<x<1$ 时它不等于零），得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

这正是所要证明的 $(*)$。

$k = 3$ 时的三次多项式解

设 $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$。由条件“当 $x = 0$ 时 $y = 0$”得 $D = 0$，而由“当 $x = 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$”得 $C = 3$。现在

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

代入 $(*)$，其中 $k^2 = 9$：

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

此式须对所有 x 成立，所以我们比较系数（compare coefficients）：

$$\begin{aligned}
x^3: &\quad -6A - 3A + 9A = 0 \ \text{（对任何 } A \text{ 都成立）}, \\
x^2: &\quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0, \\
x^1: &\quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0, \\
x^0: &\quad 2B + 9D = 0.
\end{aligned}$$

因此 $B = 0$（与 $D = 0$ 一致），而 $6A = -8C = -24$，得 $A = -4$。所求的解是

$$y = 3x - 4x^3.$$

$\sin 3\theta$ 的表达式

> **想一想** 同一个方程，我们有两个解：$\sin(3\sin^{-1} x)$ 和 $3x - 4x^3$。为甚么它们必定是同一个函数?

两者都满足 $k = 3$ 时的 $(*)$，而且在 $x = 0$ 处满足相同的条件。对于多项式，这是我们在构造时已经定下的。对于 $y = \sin(3\sin^{-1} x)$，我们有 $y(0) = \sin 0 = 0$，并且由上面的一阶导数得 $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$。

在 $-1 < x < 1$ 上，我们可以把 $(*)$ 除以 $1 - x^2 \neq 0$。这样得到 $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$，是一个系数连续（continuous）的二阶线性方程，而这类方程在 $x = 0$ 处给定 y 和 y' 的值后，恰好只有一个解。（可以想像由 $x = 0$ 出发逐步向外走：方程会根据 y 和 y' 告诉你 y''，所以初始值决定了一切。）因此

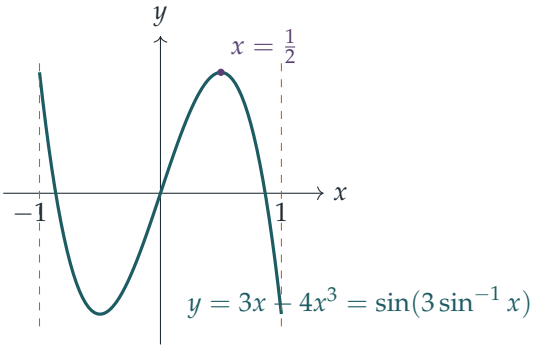
$$\sin(3\sin^{-1} x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{对于 } -1 < x < 1,$$

而根据连续性，在 $x = \pm 1$ 处同样成立。

现在设 $x = \sin\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，于是 $\sin^{-1} x = \theta$：

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

这个恒等式（identity）对所有 θ 都成立，而不仅限于 $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$。两边的周期（period）都是 2π。若 $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$，设 $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。那么 $\sin\varphi = \sin\theta$，且 $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$，所以由 φ 的恒等式即可得出 θ 的恒等式。



这个图像就是大家熟悉的曲线 $\sin 3\theta$ 通过 $x = \sin\theta$ 所见的样子：当 θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，3θ 走过一个半振荡，因此在 $x = \pm\frac{1}{2}$ 处（即 $3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$）有两个转向点（turning point）。

验算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$，而 $3 - 4 = -1$。　$\theta = \frac{\pi}{6}$：$\sin\frac{\pi}{2} = 1$，而 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$。
- 数值上，当 $\theta = 0.7$：$\sin 2.1 = 0.86321$，而 $3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$。
- 同一个恒等式也可以由 $\sin(2\theta + \theta)$ 和二倍角公式（double-angle formulae）推出，这是一个很好的独立验算。

常见错误

- 直接用商法则（quotient rule）对 $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 求导：做法正确，但十分繁复。先消去平方根会简洁得多。
- 忘记说明为甚么那个三次多项式等于 $\sin(3\sin^{-1}x)$。单是满足同一个方程并不足够：两个解还必须有相同的 $y(0)$ 和 $y'(0)$。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是切比雪夫（Chebyshev）方程。当 $k = n$ 是整数时，它有一个多项式解，而 $\cos(n\cos^{-1}x)$ 就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$，在数值逼近（numerical approximation）中占有核心地位。我们用到的唯一性定理（uniqueness theorem,

即 Picard–Lindelöf 定理）会在大学一年级的微分方程课程中证明。处理这类方程的幂级数（power series）方法，可参阅 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（一本微分方程入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。