详细解答

STEP I 1999，第 6 题

纯数学 · 二次函数的极值

STEP I 1999，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q6

关键思路

直线在闭区间（closed interval）上的极值必定出现在端点，而哪一端取最大值、哪一端取最小值，只取决于斜率（gradient）的正负。对于 $c > 0$ 的二次函数（quadratic），图像是一条 $\cup$ 形的抛物线（parabola）：最大值仍然在端点取得，但最小值则当顶点位于区间内时在顶点（vertex）取得，否则在较近的一端取得。因此，整道题归根究底就是要问：顶点 $x = -b/(2c)$ 相对于 $[-10, 10]$ 位于何处。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x) = bx + a$，则 $f(10) = a + 10b$ 及 $f(-10) = a - 10b$。

- 若 $b > 0$, f 严格递增 (strictly increasing), 故最小值为 $f(-10) = a - 10b$（在 $x = -10$ 取得），最大值为 $f(10) = a + 10b$（在 $x = 10$ 取得）。
- 若 $b = 0$，则对所有 x 均有 $f(x) = a$，故最大值和最小值都是 a。
- 若 $b < 0$, f 严格递减 (strictly decreasing), 故最大值为 $f(-10) = a - 10b$（在 $x = -10$ 取得），最小值为 $f(10) = a + 10b$（在 $x = 10$ 取得）。

三种情况可以归纳为

$$\text{最大值} = a + 10|b|, \qquad \text{最小值} = a - 10|b|.$$

第 (ii) 部分

设 $g(x) = cx^2 + bx + a$，其中 $c \geq 0$。若 $c = 0$，这就是第 (i) 部分，答案如上所述为 $a \pm 10|b|$。以下取 $c > 0$，并配方（complete the square）：

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

图像是一条 $\cup$ 形的抛物线，顶点在 $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$，g 在该处取得所有实数 x 之中的最小值。此外，g 在 $x < x_0$ 时递减，在 $x > x_0$ 时递增。两个端点的值为

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

最大值。

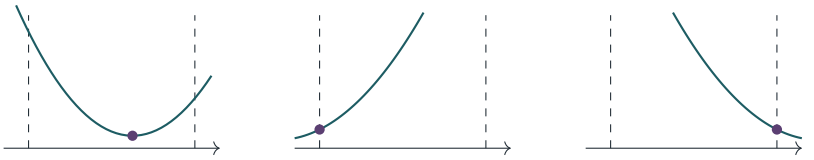
> **想一想** 为甚么无论顶点在哪里，g 在这个区间上的最大值都必定在其中一个端点取得?

由于 $c > 0$,$g(x)$ 只通过距离 $|x - x_0|$ 而取决于 x,并且随这个距离增大而增大。在 $[-10, 10]$ 上，距离 $|x - x_0|$ 在其中一个端点最大（即离 x_0 较远的那一端）。所以最大值是 $g(10)$ 与 $g(-10)$ 之中较大的一个，而两者之差为 $g(10) - g(-10) = 20b$。因此：

- 若 $b > 0$，最大值为 $a + 100c + 10b$，在 $x = 10$ 取得；
- 若 $b < 0$，最大值为 $a + 100c - 10b$，在 $x = -10$ 取得；
- 若 $b = 0$，最大值为 $a + 100c$，在两个端点同时取得。

在所有情况下，最大值 $= a + 100c + 10|b|$。这个结果在 $c = 0$ 时同样成立。

最小值。 这时 x_0 的位置就至关重要了。顶点位于区间内，当且仅当 $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$，即（各项乘以 $2c > 0$）$-20c \leq b \leq 20c$，亦即 $|b| \leq 20c$。



虚线为 $x = \pm 10$，圆点标示函数在区间上的最小值。

- $|b| \leq 20c$（**顶点在区间内**）。最小值就是全局最小值（global minimum），

$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{于} x = -\frac{b}{2c}.$$

- $b > 20c$（**顶点在左方**，$x_0 < -10$）。在 $[-10, 10]$ 上有 $x > x_0$，故 g 在该处递增，最小值为 $g(-10) = a + 100c - 10b$，在 $x = -10$ 取得。
- $b < -20c$（**顶点在右方**，$x_0 > 10$）。这时 g 在整个区间上递减，故最小值为 $g(10) = a + 100c + 10b$，在 $x = 10$ 取得。

顶点在区间外的两种情况可以合并为：当 $|b| > 20c$ 时，最小值 $= a + 100c - 10|b|$。

? **想一想** 在边界 $|b| = 20c$ 上会怎样？两条公式在那里会否互相矛盾？

不会。若 $b = 20c$，则 $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$，而 $a + 100c - 10b = a - 100c$ 亦然，因为这时顶点恰好在 $x = -10$。$b = -20c$ 的情况同理。所以当 b 越过 $\pm 20c$ 时，答案是连续地变化的，边界归入哪一种情况都没有分别。

总结。对于 $-10 \le x \le 10$ 及 $c \ge 0$：

$$\text{最大值} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{最小值} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ 及} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0$、$b \neq 0$ 的情况属于 $|b| > 20c = 0$，所得结果正是第 (i) 部分的答案。

验算

- 取 $g(x) = x^2 + 4x + 1$：这里 $|b| = 4 \le 20$，故最小值为 $1 - 4 = -3$，在 $x = -2$ 取得，而最大值为 $1 + 100 + 40 = 141$，在 $x = 10$ 取得。直接代入计算，结果相符。
- 取 $g(x) = x^2 + 30x$：这里 $b = 30 > 20$，故顶点 $x = -15$ 在区间之外，最小值为 $g(-10) = 100 - 300 = -200$。事实上 $g(-10) = -200$，而且 g 在 $[-10, 10]$ 上递增。
- 另外用电脑作了简短的检验：对 1000 组随机的 (a, b, c)（包括 $c = 0$ 和边界 $|b| = 20c$ 的情况），以精确的有理数运算，把公式与在 $[-10, 10]$ 内 401 个点上逐点搜索的结果比较。所有情况均相符。

常见错误

- 没有检查顶点是否位于 $[-10, 10]$ 内，就直接把 $a - \frac{b^2}{4c}$ 当作最小值。
- 遗漏了 $c = 0$（没有顶点，而且不能除以 c）和 $b = c = 0$ 这两种情况。

▶ 顶点在区间外时，弄错哪一端取最小值：应该是较接近顶点的那一端。

STEP 之外

这道题背后的事实是极值定理（Extreme Value Theorem）：在有界闭区间上的连续函数（continuous function）必定取得最大值和最小值，而这些值不是在端点取得，就是在区间内的驻点（stationary point）取得。像 $cx^2 + bx + a$（其中 $c \geq 0$）这样的凸函数（convex function）在端点取得最大值，这个观察是凸优化（convex optimisation）的第一步，而凸优化正是现代应用数学许多范畴的基础。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对极值定理有严谨的证明。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。