详细解答

STEP I 1999，第 5 题

纯数学 • 小角近似

STEP I 1999，第 5 题

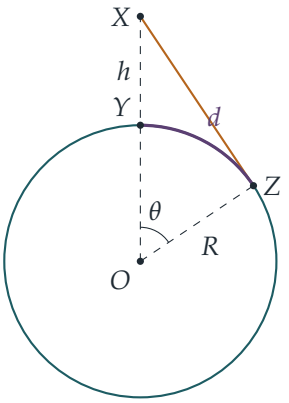
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q5

关键思路

“刚好在地平线上看见”的意思是，由 Z 望向 X 的视线刚好擦过地球表面，所以这条视线是地球在 Z 处的切线（tangent），并与半径 OZ 垂直。这样便得到一个以地心 O 为顶点之一的直角三角形，而弧（arc）YZ 的长度等于 R 乘以 O 处的角。至于那两个近似式（approximation），则分别来自考虑这个角很小的情况，以及这个角接近直角的情况。

解答



第 (i) 部分

设 O 为地球的中心，并设 $\theta = \angle YOZ$。由于 X 位于 Y 的正上方，O、Y、X 三点共线（collinear），且 $OX = R + h$。由于从 Z 刚好可以看见 X，直线 ZX 与地球相切于 Z，所

以它与半径 OZ 垂直。在直角三角形 OZX 中，

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

在半径为 R 的圆上，对应圆心角 θ 的弧 YZ 的长度为 $R\theta$，所以

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

这里 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，因为 $0 < R/(R+h) < 1$。

第 (ii) 部分

当 h 相对于 R 很小时，$\cos\theta = R/(R+h)$ 接近 1，所以 θ 很小，我们可以使用 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$。此外，

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

因为 $R + h \approx R$。令两者相等，

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

其中因 $\theta > 0$ 而取正根。因此

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

这正是所要求的形式，其中 $k = \sqrt{2}$。

第 (iii) 部分

现在 $R/(R+h)$ 很小，所以 $\cos\theta$ 接近 0，而 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$，并不是小角。题目给出的近似式只适用于小角，所以我们改为量度那个*确实*很小的角。

> ? **想一想** 这里哪一个角是小角？哪一个近似式适用于它？

记 $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$，其中 $\phi = \angle OXZ$ 是卫星处的角，当卫星离得很远时，这个角很小。于是 $\cos\theta = \sin\phi$，所以

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

我们需要把这个式子准确至 R/h 的二阶，因为答案中有一项 R^2/h。由二项式展开（binomial expansion），因 $R/h < 1$ 而成立，

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

利用 $\sin\phi \approx \phi$,

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

最后一项比 R^2/h 还要再小一个因子 R/h，所以我们把它舍去，得到

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

这正是所要求的形式，其中 $a = \frac{\pi}{2}$ 及 $b = -1$。

在这个阶数下使用 $\sin\phi \approx \phi$ 是稳妥的：它的误差约为 $\frac{1}{6}\phi^3$，属于 R^3/h^3 的阶，所以只会在 R^4/h^3 这一阶才影响 d。

验算

- 极限情况合理。当 $h \to 0$ 时，$d \to 0$。当 $h \to \infty$ 时，$d \to \frac{\pi}{2}R$，即绕地球四分之一圈：一颗非常遥远的卫星几乎可以看见整个半球。$-R^2/h$ 这一项是负数，所以 d 从下方趋近 $\frac{\pi}{2}R$，这是必然的，因为 $\theta < \frac{\pi}{2}$。
- 数值上，取 $R = 1$ 及 $h = 10^{-4}$，d 的准确值除以 $\sqrt{2Rh}$ 得 0.99996。取 $h = 1$ 及 $R = 0.01$，d 的准确值与 $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$ 相差 9.9×10^{-7}，约为 R^3/h^2，与预测相符。
- 若卫星位于半径为 6370 km 的地球上空 300 km 处，d 的准确值约为 1918 km，而 $\sqrt{2Rh}$ 给出 1955 km。

常见错误

- 在第 (iii) 部分使用 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$，但那里 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$，并不是小角。
- 在第 (iii) 部分只把 $R/(R+h)$ 展开至一阶，结果失去了 R^2/h 这一项，得出错误的 b。

STEP 之外

这两部分都是渐近展开（asymptotic expansion）：把 d 的准确值按一个小参数（small parameter）h/R 或 R/h 的幂展开，保留至指定阶数的各项，同时估计误差的上界。利用大 O 记号和带余项的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）把“$\approx$”说得精确，

是大学一年级数学分析的课题；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）中有更多这类近似法的 STEP 练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。