详细解答

STEP I 1999，第 4 题

纯数学 · 含绝对值的区域

> **STEP I 1999，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q4

关键思路

绝对值（modulus）符号把平面分成若干区域，在每个区域内各括号的正负号固定，于是条件就变成普通的线性不等式（最后一部分则是双曲线型的不等式）。另一个大大节省时间的方法是利用对称（symmetry）和平移（translation）：$|x|$ 和 $|y|$ 令集合对两条坐标轴都对称，所以只需在一个象限内计算，然后作反射；而把 x 换成 $x-1$，只是把整个图形向右平移一个单位。

解答

第 (i) 部分

把 x 换成 $-x$ 或把 y 换成 $-y$，集合都不变，所以它对两条坐标轴都对称。在第一象限（$x \geq 0$，$y \geq 0$）内，条件就是 $x+y \leq 1$：即顶点为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 的三角形。对两条坐标轴作反射，便得到四个三角形，合起来是一个以一角竖立的正方形，顶点为

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1).$$

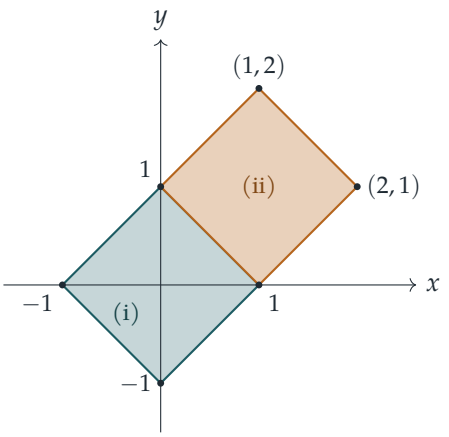
换句话说，它是四个半平面（half-plane）$\pm x \pm y \leq 1$ 的交集。边界包括在内（不等式是 $\leq$），面积为 2。

第 (ii) 部分

设 $X = x-1$，$Y = y-1$。条件于是变成 $|X|+|Y| \leq 1$，也就是 (X,Y) 坐标下的第 (i) 部分。因此这个集合就是把第 (i) 部分的正方形平移 $(1,1)$ 所得：中心为 $(1,1)$，顶点为

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

由直线 $x+y=1$、$x+y=3$、$y=x+1$ 和 $y=x-1$ 围成。它与两条坐标轴相接，接点分别是 $(1,0)$ 和 $(0,1)$。



第 (iii) 部分

同样先作平移：设 $X=x-1$，$Y=y+1$，条件变成

$$|X|\le 1+|Y|.$$

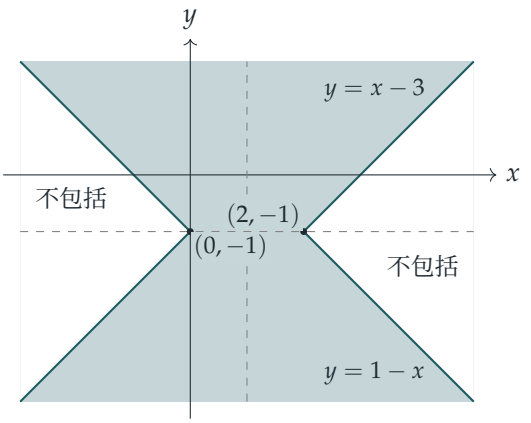
这个条件对 X 轴和 Y 轴都对称，即对直线 $x=1$ 和 $y=-1$ 对称。在象限 $X\ge 0$、$Y\ge 0$ 内，条件是 $X\le 1+Y$：即直线 $X=1+Y$ 左方的所有点，这条直线通过 $(1,0)$，斜率为 1。作反射之后，这个集合包含平面上所有的点，只除去两个开的楔形区域：

- 右边是 $X>1+|Y|$：一个直角楔形，顶点为 $(X,Y)=(1,0)$，向右张开，边界为 $Y=\pm(X-1)$；
- 左边是 $X<-1-|Y|$：它的镜像，顶点为 $(-1,0)$，向左张开。

? **想一想** 这个集合是否像 (i) 和 (ii) 那样有界（bounded）?

不是。那个负号改变了一切：$|Y|$ 越大，条件反而越容易满足，所以对每个固定的 Y，容许的 X 构成区间 $-1-|Y|\le X\le 1+|Y|$，而这个区间随 $|Y|$ 增大而变阔。特别地，整条垂直线 $X=0$（即 $x=1$）都在集合之内。

回到 x,y 坐标，两个顶点是 $(2,-1)$ 和 $(0,-1)$。被排除的右楔形是 $x>2+|y+1|$，边界是 $x\ge 2$ 时的两条半直线 $y=x-3$ 和 $y=1-x$；被排除的左楔形是 $x<-|y+1|$，边界是 $x\le 0$ 时的 $y=x-1$ 和 $y=-1-x$。边界线本身属于这个集合。在直线 $y=-1$ 上，集合只是线段 $0\le x\le 2$，那是它最窄的地方。



虚线 $x = 1$ 和 $y = -1$ 是对称轴。

第 (iv) 部分

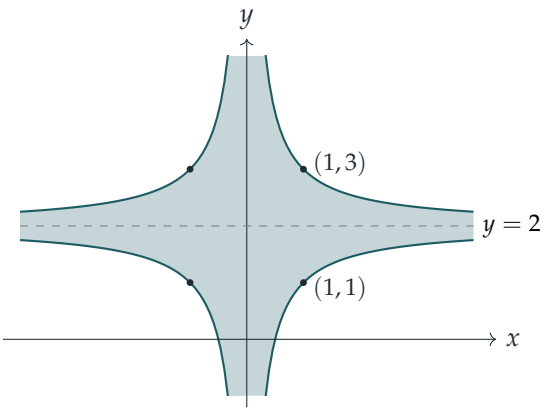
设 $Y = y - 2$，条件变成 $|x|\,|Y| \le 1$，它对 x 轴方向和直线 $Y = 0$（即 $y = 2$）都对称。在象限 $x \ge 0$、$Y \ge 0$ 内：

- 若 $x = 0$，条件对任何 Y 都成立，所以整条 y 轴都在集合之内；
- 若 $x > 0$，我们可以除以 x，条件变成 $0 \le Y \le 1/x$：即双曲线（hyperbola）$Y = 1/x$ 下方的区域。

对两条对称轴作反射，这个集合就是

$$x = 0, \quad \text{或} \quad 2 - \frac{1}{|x|} \le y \le 2 + \frac{1}{|x|} \ \ (x \ne 0),$$

即夹在双曲线 $(y-2)x = \pm 1$ 四条分支之间的区域。它包含整条 y 轴和整条直线 $y = 2$，而这两条直线正是边界曲线的渐近线（asymptote）。它看起来像一个以 $(0,2)$ 为中心的粗身加号：“正方形” $|x| \le 1$、$|y-2| \le 1$ 的四个角落在边界上，位于 $(\pm 1, 1)$ 和 $(\pm 1, 3)$；当 $|x| \to \infty$ 时，横臂向 $y = 2$ 收窄；当 $|y| \to \infty$ 时，直臂向 y 轴收窄。这个集合是无界的（不过有趣的是，它的面积是无限大）。



验算

- 取几个点代入原来的不等式检验。在 (iii) 中，$(1, 100)$ 给出 $0 - 101 \leq 1$，所以它在集合之内（证实集合是无界的），而 $(2.01, -1)$ 给出 $1.01 > 1$，刚好在右边顶点之外。在 (iv) 中，$(2, 2.5)$ 给出 $2 \times 0.5 = 1$，在边界上，而 $(2, 2.51)$ 则刚好在外面。
- 在 (i) 中，四个三角形每个面积为 $\frac{1}{2}$，所以正方形的面积是 2；用格点数算得到 2.002。
- 我们为每一部分在 $[-6, 6]^2$ 内测试了 400,000 个随机点，把原来的不等式与我们的描述（半平面、被排除的楔形，或 $|y - 2| \leq 1/|x|$）互相比较；结果完全一致。

常见错误

- 在 (ii) 和 (iii) 中，平移方向弄错：$|x - 1|$ 把图形移到 $x = +1$，而 $|y + 1|$ 把图形移到 $y = -1$。
- 在 (iii) 中，仿照 (i) 画出一个有界的菱形。负号把 $|y + 1|$ 的作用倒转了，集合其实是无界的。
- 在 (iv) 中，没有另外处理 $x = 0$ 就除以 $|x|$，因而遗漏了整条 y 轴都属于这个集合这一事实。

STEP 之外

(i) 中的集合是“计程车”范数（taxicab norm）$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ 的单位球（unit ball），而 (ii) 则是以 $(1, 1)$ 为中心、半径为 1 的球。不同的范数给出形状不同的单位球（通常的距离给出圆形，$\max(|x|, |y|)$ 给出边为水平的正方形），而分析或度量空间（metric space）的入门课程会证明，在 $\mathbb{R}^2$ 上它们所定义的收敛（convergence）和连续（continuity）概

念完全相同。Bartle 与 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）是认识这些概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。