详细解答

STEP I 1999，第 3 题

纯数学 · 轮换方程组

STEP I 1999，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q3

关键思路

每条方程都是 $x_k = f(x_{k+1})$ 的形式，其中 $f(x) = 1 + 1/x$，而整个方程组首尾相接，形成一个环。相邻两项之差遵从一个简单的规律：每个差等于下一个差除以两个大于 1 的数之积。因此沿着环走一圈，这些差只会愈来愈小。既然最后回到起点，它们必定全部为零。

以下一律把下标按循环（cyclic）方式理解：x_{n+1} 即 x_1，x_{n+2} 即 x_2。这样，方程组中每条方程都可写成同一形式

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

解答

第 (i) 部分

所有 x_k 皆为正数，所以对每个 k 都有 $1/x_{k+1} > 0$。因此

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{对于} k = 1, 2, \ldots, n,$$

而由于下标是循环的，这已涵盖 $x_1, \ldots, x_n$ 中的每一个（最后一个是 $x_n = 1 + 1/x_1$）。所以 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$。

第 (ii) 部分

把第一条方程减去第二条方程：

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

这正是所求的结果。我们只用了 $x_1 = 1 + 1/x_2$ 和 $x_2 = 1 + 1/x_3$（以及 $n \geq 3$，使得 x_3 是另一个变量）。对任意两条相邻的方程作完全相同的计算，便得到对每个 k 都有

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(下标按循环方式理解)}.$$

第 (iii) 部分

记相邻两项之差为 $d_k = x_k - x_{k+1}$，故 $d_n = x_n - x_1$。(ii) 的一般形式就是 $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$。取绝对值（absolute value），并利用第 (i) 部分所给出的 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$，

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

而且只要 $d_{k+1} \neq 0$，不等式（inequality）就是严格成立的。把这些不等式沿着环逐一串连起来，

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

两端是同一个数，所以这串不等式中每一个都是等式。特别地，$|d_1| = |d_2|$。但假如 $d_2 \neq 0$，我们便会有严格的 $|d_1| < |d_2|$，所以 $d_2 = 0$；于是所有 $|d_k|$ 既然都等于 $|d_2|$，也就全部为零。

? **想一想** 我们究竟在哪一步用到了方程组首尾相接，即 $x_n = 1 + 1/x_1$?

只在这串不等式的最后一环 $|d_n| \leq |d_1|$ 用到，它来自 $x_n = 1 + 1/x_1$。没有这一环，这些差大可以随 k 增加而愈来愈大；事实上，一条不闭合的链 $x_1, \ldots, x_n$ 不一定是常数。正是因为要回到起点，所谓的缩小才被迫变成完全没有缩小。

所以对每个 k 都有 $x_k = x_{k+1}$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$。

x_1 的值

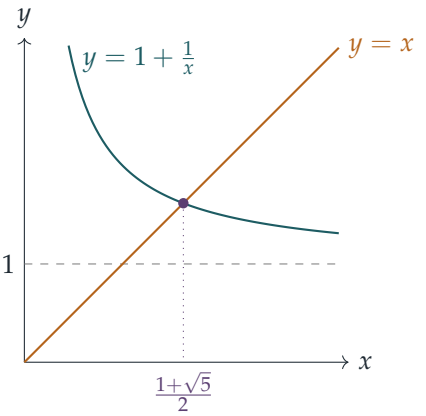
把这个共同的值称为 x。现在任何一条方程都变成 $x = 1 + 1/x$，所以

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

由第 (i) 部分知 $x > 1$，故负根须舍去，所以

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

反过来，令每个 x_k 都等于这个值，确实满足全部 n 条方程，所以方程组的确有这个解，而由 (iii) 可知再没有其他解。从几何上看，x 就是曲线 $y = 1 + 1/x$ 与直线 $y = x$ 相交之处：



验算

- 取 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$，得 $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$，符合要求。
- (ii) 中的恒等式（identity）可以用任何一条不闭合的链来检验：取 $x_3 = 2$，则 $x_2 = \frac{3}{2}$，$x_1 = \frac{5}{3}$。于是 $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$，而 $-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$。
- 沿着环走完一整圈，得 $x_1 = f^n(x_1)$，其中 $f(x) = 1 + 1/x$。对 $n = 3, \ldots, 11$，在 $(0, 20)$ 上以数值方法扫描 $f^n(x) - x$，只找到一次变号，位于 $x \approx 1.618$，由此确认没有其他解。

常见错误

- 单凭 $|d_1| \le |d_2|$ 就去证明 (iii)。一步只说明这些差不会变大；你必须沿着环走完一整圈，回到 $|d_1|$。
- 先假设各个 x_k 相等，然后求 x_1。第 (iii) 部分才是这样做的依据，而它需要第 (i) 部分的严格不等式 $x_{k+1} x_{k+2} > 1$。
- 忘记舍去 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，它是负数。

STEP 之外

这道题的核心在于：在 $x > 1$ 上，$f(x) = 1 + 1/x$ 会把点拉得更近，因为 $|f(a) - f(b)| = |a - b|/(ab)$。这样的映射称为压缩映射（contraction），而巴拿赫不动点定理（Banach fixed-point theorem）指出，完备空间（complete space）上的压缩映射恰有一个不动点，而且从任何起点开始迭代（iteration）都会收敛（converge）到这个不动点。在这里从 $x = 1$ 开始迭代，得到的是相邻斐波那契数（Fibonacci numbers）之比 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$，以及黄金比（golden ratio）的连分数（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$。分析方面，可读 Abbott 的 *Understanding Analysis*。连分数方面，可读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。