详细解答

STEP I 1999，第 2 题

纯数学 · 轨迹与形心

> **STEP I 1999，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q2

关键思路

写下条件并展开，便会得到 x^2 和 y^2 的系数同为 3，而且没有 xy 项：这正是圆的特征。配方法（completing the square）显示出圆心的位置，而形心（centroid）亦自然出现，因为一次项中出现的正是 $x_1 + x_2 + x_3$。至于对 a^2 的限制，只要问一问“半径的平方”何时可以是负数，答案便呼之欲出。

解答

轨迹

设 $P = (x, y)$ 为轨迹（locus）上的一点，并记 $A_i = (x_i, y_i)$，其中 $i = 1, 2, 3$。条件是

$$\sum_{i=1}^{3} \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right] = a^2.$$

展开，并利用 $x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x}$ 及 $y_1 + y_2 + y_3 = 3\bar{y}$，得

$$3x^2 - 6\bar{x}\,x + 3y^2 - 6\bar{y}\,y + \sum_i (x_i^2 + y_i^2) = a^2.$$

这就是轨迹的方程。要看清它是甚么，把方程除以 3 再配方：

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - \sum_i (x_i^2 + y_i^2) + 3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2}{3}.$$

分子可以整理得相当简洁。由于 $\sum_i x_i = 3\bar{x}$，

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \cdot 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 3\bar{x}^2,$$

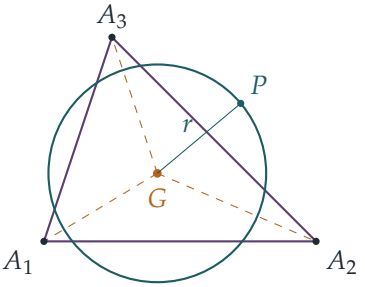
y 的情况亦相同。因此，若记

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2\right]$$

为三点与其形心 $G = (\bar{x}, \bar{y})$ 的距离的平方和，则轨迹为

$$\boxed{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - S}{3}}.$$

诠释。当 $a^2 > S$ 时，这是一个圆，圆心是三点的形心 G，半径为 $\sqrt{(a^2 - S)/3}$。随着 a^2 变化，我们得到一族以 G 为圆心的同心圆（concentric circles）。在临界情况 $a^2 = S$ 时，这个“圆”收缩成单独一点 G。



为何 a^2 不能小于 S

想一想 方框内方程的右边是负数，这代表甚么？

左边 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$ 是实数的平方和，所以永不为负。若 $a^2 < S$，右边是负数，没有任何实点 (x, y) 满足方程：轨迹是空集。因此，要有点能够按题目所述移动，必须有 $a^2 \geq S$。

把同一番运算倒过来看，会很有启发。我们实际上证明了的，是以下对任意点 P 均成立的恒等式（identity）：

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 3\,PG^2 + S.$$

由于 $PG^2 \geq 0$，和 $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2$ 必定不小于 S，而等号仅在 $P = G$ 时成立。用文字来说：形心就是令到三点的距离平方和最小的那一点，而最小值为 S。一个比这最小值还要小的常数和 a^2 是不可能的。

验算

- 取 $A_1 = (0,0)$、$A_2 = (4,0)$、$A_3 = (1,3)$，则 $G = (\frac{5}{3}, 1)$，且 $S = \frac{34}{9} + \frac{58}{9} + \frac{40}{9} = \frac{44}{3}$。在 $P = G$ 时，距离平方和恰好是 $\frac{44}{3} \approx 14.67$；在 $P = (0,0)$ 时，它是 $0 + 16 + 10 = 26$，

而 $3PG^2 + S = 3 \cdot \frac{34}{9} + \frac{44}{3} = 26$，与恒等式所预测的一致。

- 另一个有用的形式：$S = \frac{1}{3}\left(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2\right)$。在上述例子中，各边长的平方为 16、18 和 10，同样得出 $\frac{44}{3}$。
- 我们以分数作精确运算，在 2000 组随机抽取的三点上检验了这个恒等式，并以数值方法确认了圆上的点给出的和为 a^2，以及该和的最小值为 S，在 G 处取得。

常见错误

- 把半径留作 $\sqrt{\left(a^2 - \sum(x_i^2 + y_i^2)\right)/3 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$，而没有认出它可以用 S 表示；这样一来，最后一部分便很难看得出来。
- 忘记退化情况（degenerate case）$a^2 = S$，此时轨迹是单独一点，而不是圆。

STEP 之外

恒等式 $\sum PA_i^2 = 3PG^2 + \sum GA_i^2$ 是转动惯量（moment of inertia）的平行轴定理（parallel axis theorem）的一种形式；在统计学中，它就是把平方和分解为“组间”（between）与“组内”（within）两部分：平均值正是令离差平方和最小的那个值，而这就是最小二乘法（least squares）拟合之所以行得通的根本原因。在线性代数中，它是乔装了的毕氏定理（Pythagoras′ theorem），因为由 G 到 P 的向量与各离差 $A_i - G$（在适当的意义下）正交（orthogonal），而这些离差之和为零。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）阐述了这种以投影（projection）看待最小二乘法的观点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。