详细解答

STEP I 1999，第 12 题

概率与统计 · 灌铅骰子的不等式

> **STEP I 1999，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 9.13 节做了手脚的骰子中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/loaded-dice.html

关键思路

第一行的不等式（inequality）是整道题的原动力。假如每个总和出现的机会均等，那么 2 和 12 这两个“角落”总和各自会迫使某个概率乘积等于 $\frac{1}{11}$，而总和 7 就会包含两个交叉项，其和的形式为 $c\,(x + x^{-1})$。该不等式令这个和变得太大。第 (ii) 部分是同一个想法换了另一副面貌：当所有项都相等时，平方和最小。

解答

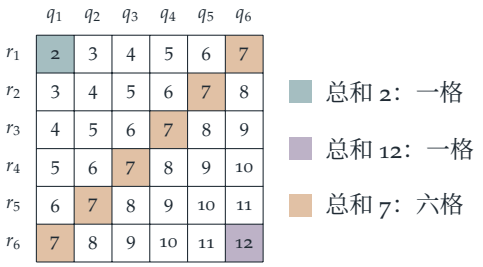
第 (i) 部分

不等式。当 $x > 0$ 时可以取平方根，而

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $x + x^{-1} \geq 2$，而且只有当 $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$，即 $x = 1$ 时等号才成立。（等价的做法是：把 $(x-1)^2 \geq 0$ 乘以正数 x^{-1}。）

骰子。设 p_s 为总和等于 s 的概率（probability），其中 $2 \leq s \leq 12$。由于两颗骰子互相独立（independent），出现数对（第一颗掷得 i，第二颗掷得 j）的概率是 $q_i r_j$。下面的方格表显示哪些数对给出我们所需的总和。



总和 2 只能来自 $(1,1)$，总和 12 只能来自 $(6,6)$，所以

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

总和 7 来自六个数对，当中包括 $(1,6)$ 和 $(6,1)$。这六项全部非负，所以

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

现在用反证法（proof by contradiction），假设全部十一个总和出现的机会均等。它们已穷尽所有可能，所以每个总和的概率都是 $\frac{1}{11}$。于是 $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$ 及 $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$。特别地，q_1, r_1, q_6, r_6 均不为零，所以可以写成 $r_1 = \dfrac{1}{11 q_1}$ 及 $r_6 = \dfrac{1}{11 q_6}$。代入后，

$$\begin{aligned} p_7 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11 q_6} + \frac{q_6}{11 q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{其中} x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

这是根据刚才证明的不等式。但 $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$，矛盾。因此，无论两颗骰子怎样灌铅，总和 $2, 3, \ldots, 12$ 都不可能全部机会均等。

想一想 为甚么必须指出 q_1 和 q_6 不为零?

我们曾除以 q_1 和 q_6，而不等式 $x + x^{-1} \geq 2$ 需要 $x > 0$。这两点都有保证，因为乘积 $q_1 r_1$ 和 $q_6 r_6$ 各自等于 $\frac{1}{11} \neq 0$。少了这一步，论证就会有漏洞：一般而言，一颗永远掷不出 1 的骰子是完全容许的。

第 (ii) 部分

设 S 为第一颗骰子两次掷得相同点数的事件（event）。两次投掷互相独立，所以两次都掷得 j 的概率是 q_j^2，而这六个事件互不相交（disjoint）。因此

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

已知 $q_j \geq 0$ 及 $\sum q_j = 1$，我们要求这个值最小可以是多少。把一个量度骰子偏离公平程度的平方和展开：

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36} \\ &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$，而且等号恰好在每个 $q_j = \frac{1}{6}$，即骰子公平时成立。

想一想 1/36 从何而来？为甚么说它是个烟幕？

$\frac{1}{36}$ 是用公平骰子掷出某一个特定数对（例如一对六）的概率。“两个点数相同”涵盖六个这样的数对，所以对公平骰子来说，其概率是 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$，而把骰子灌铅只会令它增加。

所以答案是**不可能**：无论 q_j 取甚么值，两个点数相同的概率至少是 $\frac{1}{6}$，远大于 $\frac{1}{36}$。

验算

- 公平骰子：$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$，但 $p_7 = \frac{6}{36}$，明显不相等，与结果所预测的一致。
- 以数值方法搜索 20,000 对随机灌铅的骰子，从未出现全部十一个总和的概率与 $\frac{1}{11}$ 相差都在 0.05 以内的情况；用分数作精确检查，亦证实每次都有 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$。
- 对于 $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$ 的骰子，我们得到 $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$；模拟 200,000 次双掷的结果是 0.194。

常见错误

- 假设两颗骰子完全相同（$q_i = r_i$）。题目容许两颗骰子的灌铅方式不同，而上面的论证并不需要两者一致。
- 写成 $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$。其实还有另外四项；我们只需要一个不等式，所以可以把它们舍去，但要说明原因（$q_i r_j \geq 0$）。
- 在第 (ii) 部分，以 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$ 作答，或者忘记“相同”是指六个结果中的任何一个。

STEP 之外

第 (ii) 部分所说的就是 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$，这是柯西－施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz inequality）的特殊情况；$\sum q_j^2$ 这个量称为*碰撞概率*（collision probability），在信息论

（information theory）和杂凑（hashing）的分析中都会出现。第 (i) 部分是关于生成函数（generating function）的经典结果：两颗骰子总和的概率生成函数（probability generating function）是 $Q(t)R(t)$，而有一个巧妙的另证指出，若总和均匀分布，$1+t+\cdots+t^{10}$ 就必须等于一个常数乘以两个 5 次实系数多项式的积，而这两个多项式各有一个实根，然而 $1+t+\cdots+t^{10}=(t^{11}-1)/(t-1)$ 却没有实根。这类生成函数的理论可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。