详细解答

STEP I 1999，第 11 题

力学 • 引力作用下的圆周运动

STEP I 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 10.8 节排成三角形的三颗恒星中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/three-stars.html

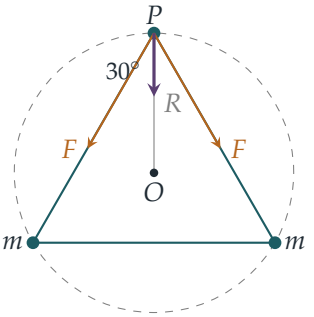
关键思路

先猜出运动的形式，再加以检验。如果三角形绕着中心作刚性转动（rigid rotation），每颗星都沿圆周运动，因此它所受的净力（net force）必须恰好是 $m\omega^2 R$，并且指向中心。根据对称性，其余各星对每颗星的引力（gravitational pull）正好指向中心。所以我们只需令这个引力的大小等于 $m\omega^2 R$，便可读出 ω。在中心放置一颗星，只是多加一个大小已知、指向中心的引力。

解答

我们把各星看成质点（particles），它们只在彼此的引力作用下运动。设 O 为质心（centre of mass）。对三个相等的质量而言，质心就是三角形的形心（centroid），它与每个顶点的距离是

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



三颗星

考虑位于顶部顶点的星 P。其余两颗星各以大小为

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

的力吸引它，方向沿着三角形的一条边。经过 P 的每条边都与 PO 成 30° 角，因为 PO 平分位于 P 的 60° 角。沿 PO 方向及垂直于 PO 方向分解：

- 在垂直于 PO 的方向，两个分量大小相等、方向相反，因此互相抵消；
- 在沿 PO 的方向，合力（resultant）为 $2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$，指向 O。

根据对称性，其余两颗星的情况相同。

现在假设三角形以角速度（angular velocity）ω 绕 O 作刚性转动。于是每颗星都沿半径为 R 的圆周以恒定速率 $R\omega$ 运动，因此它需要一个指向 O 的加速度 $R\omega^2$。在指向 O 的方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

? **想一想** 为甚么这样就证明了这种运动是可能的，而不仅仅是各力在某一瞬间恰好平衡?

让各星从顶点出发，速度大小为 $R\omega$，方向垂直于 OP，并且全部朝同一方向转动。只要整个排列仍然是边长为 a、中心在 O 的等边三角形，每颗星所受的力，其大小和方向都恰好符合以角速度 ω 作圆周运动的要求。所以这个刚性转动的三角形，在每一刻都满足每颗星的运动方程（equation of motion）。因此它是这个系统的一个真正的运动：它就是由这些初始条件（initial conditions）所决定的解。总动量（momentum）为零，所以 O 保持不动，正如所料。因此每颗星都可以以角速度 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$ 绕质心公转。

在中心加上第四颗星

在 O 放置一颗质量为 λm 的星。质心仍然是 O。外围三颗星对中心星的引力大小相等，彼此成 120° 角，所以合力为零。因此，只要外围三颗星保持对称的排列，中心星便会在 O 保持静止。

现在每颗外围星都多受一个指向 O 的引力，大小为

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

这是因为 $R^2 = a^2/3$。这个额外的力沿 PO 作用，所以它只是加在向内的合力之上。指向 O 方向的运动方程变成

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}\left(1+\sqrt{3}\,\lambda\right).$$

用与先前相同的论证，可知这个刚性转动是一个真正的运动。所以，当第四颗星静止于中心时，外围三颗星可以绕着它公转，角速度为

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

验算

- 代入 $\lambda = 0$ 便得回第一个答案，这是必然的。
- 量纲（dimensions）：$\gamma m/r^2$ 是加速度，所以 $\gamma m/a^3$ 的单位是 时间$^{-2}$，正好与 ω^2 相符。
- 如果 λ 非常大，外围各星几乎感受不到彼此的引力。这时它们只绕着中心的质量运行，有 $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$，与主导项吻合。
- 我们以数值方法对完整的运动方程进行积分（取 $\gamma = m = a = 1$）。从预测的圆周运动速度出发，各星在公转三周后回到起始位置，相对误差小于 10^{-7}，对 $\lambda = 0$、1 和 2.5 皆然。例如，$\lambda = 1$ 给出 $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$。

常见错误

- 以 a 而不是 $R = a/\sqrt{3}$ 作为圆的半径，或作为与中心星的距离。
- 把两个大小为 F 的引力直接相加成 $2F$，忘记了它们与 PO 成 30° 角。
- 忘记说明中心星为何保持不动：作用于它的三个引力互相抵消。

STEP 之外

这是拉格朗日（Lagrange）三体问题（three-body problem）等边三角形解的一个特殊情况；该解对位于旋转等边三角形顶点的任意三个质量都成立。同样的想法可以得出拉格朗日点（Lagrange points）L_4 和 L_5，特洛伊小行星（Trojan asteroids）就在那里与木星共用同一轨道。这类排列是否稳定（stable），是一个更深入的问题，要把运动方程在旋转解附近线性化（linearising）才能解答。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）在这个程度上对有心力（central forces）和轨道有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。