详细解答

STEP I 1999，第 10 题

力学 · 简谐运动

STEP I 1999，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q10

关键思路

质点把弹簧分成两条弹簧 AP 和 PB，两者的弹性模量（modulus of elasticity）都与整条弹簧相同，同为 λ（模量是物料本身的性质），但自然长度（natural length）分别是 a 和 b。只用一个坐标，即质点与上端的距离，对每一段写出虎克定律（Hooke's law），便会发现运动方程（equation of motion）对这个坐标而言是线性的。这个坐标的系数决定了周期（period），我们只需看看它取决于甚么、不取决于甚么。

解答

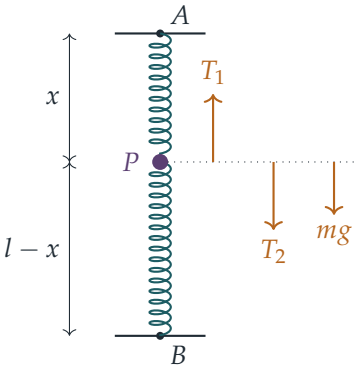
模型

设质点的质量为 m。弹簧是轻的，所以每一段上各处的张力（tension）都相同，而且它在伸长和压缩时都服从虎克定律（它是弹簧而不是弹性绳，所以既能拉也能推）。先假设 A 是上端。设在时间 t 时质点位于 A 下方距离 x 处，于是 $AP = x$，$PB = l - x$。

由于 AP 的自然长度是 a，PB 的自然长度是 b，由虎克定律得

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

其中 T_1 是 AP 的张力，T_2 是 PB 的张力。张力为正时，该段把质点拉向它的固定端；数值为负则表示该段受压缩，把质点推开。无论哪种情况，这些公式都给出正确的带符号的力，所以我们根本不必事先知道哪一段被拉长。



简谐运动

对质点沿向下方向分解力，作用于它的力有重量 mg、向上的张力 T_1 和向下的张力 T_2：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

常数 $\pm\lambda$ 互相抵消，右边是 x 的线性函数，斜率为负。记

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

于是运动方程变成

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

所以，设 $X = x - x_0$（即相对于平衡位置（equilibrium position）x_0 的位移），便有 $\ddot{X} = -\omega^2 X$。这正是以 $x = x_0$ 为中心的简谐运动（simple harmonic motion）的方程，周期为

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

这就证明了第一个结果。

? **想一想** 一旦其中一段受到压缩，运动不就不再是简谐运动了吗?

如果是弹性绳，确实如此，因为它的张力公式只在绳被拉长时才成立。弹簧在受压缩时仍服从同一条虎克定律公式，所以上面那一条方程在整个运动过程中都成立（只要弹簧圈没有压至互相紧贴），因此无须限制 l 或振幅（amplitude）。

与 l 及摆放方向无关

长度 l 只在 x_0 中出现：改变 l 会移动振动的中心，但 ω 不变，因而周期也不变。

如果改为 B 在最上方，同样的推导仍然适用，只是两段的角色互换：上面一段的自然长度现在是 b，下面一段是 a。这只不过是把 a 和 b 全部对调。周期只通过 ab 和 $a+b$ 取决于 a 和 b，而这两个式子都是对称的，所以周期不变。（平衡位置则确实会改变，因为重力现在拉长的是自然长度为 b 的那一段，而不是自然长度为 a 的那一段。）

所以，无论 l 取甚么值，也无论哪一端在最上方，周期都是 $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$，这正是所要证明的。

验算

- 质量两侧的两条弹簧相当于并联（in parallel）：劲度（stiffness）λ/a 和 λ/b 相加得 $\lambda(a+b)/(ab)$，与上面的 ω^2 一致。
- 极限情况 $b\to\infty$：下面一段变得非常弱，我们便回到一个质量挂在一条自然长度为 a 的弹簧上的情形，周期为 $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$。
- 单位：λ 是力，所以 ma/λ 的单位是 $\mathrm{kg\,m/N}=\mathrm{s}^2$。
- 数值上，取 $m=1$、$\lambda=50$、$a=1$、$b=2$，公式给出周期 0.72552。对 $l=2$、3 和 4.5（包括两段都受压缩的一种情况），并分别以两端为最上方，用数值方法逐步求解完整的运动方程，所得周期在五位有效数字内相同；另外随机选取多组常数，结果的相差也都在 10^{-5} 以内。

常见错误

- 对各段使用 $\lambda a/(a+b)$ 或类似的模量。每一段的模量仍然是 λ；改变的是劲度 $\lambda/$(自然长度)。
- 弄错下方张力的符号。被拉长的 PB 把质点向下拉，即拉向 B。
- 忘记论证摆放方向的部分：你需要说明两端对调就是把 a 和 b 对调，而周期对于它们是对称的。

STEP 之外

把一个系统拆成若干条弹簧再把劲度相加，是迈向耦合振子（coupled oscillators）的第一步：若弹簧上有多个质量，运动方程便组成一个线性方程组，而可能出现的频率就是某个矩阵的特征值（eigenvalues），即所谓“简正模式”（normal modes）。当质量数目极多

而每个都极小时，取极限便得到弹簧或杆中纵波的波动方程（wave equation）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）讨论了振动和简正模式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。