详细解答

STEP I 1999，第 1 题

纯数学 · 互质整数的计数

> **STEP I 1999，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

关键思路

能否被 2 和 5 整除（divisibility）只取决于末位数字，而能否被 3 和 7 整除只取决于模（modulo）21 的余数（remainder）。因此，我们要找的整数会按固定的规律一段接一段地重复出现，要数它们的个数，只需数出一段中有多少个，再乘以段数。至于平均值，窍门在于对称（symmetry）：若 n 在集合内，它的“拍档”$N-n$ 也在集合内，于是这些数便围绕中点两两配对。

解答

第 1 部分：小于一百万且不能被 2 或 5 整除的整数

“不能被 2 或 5 整除”的意思是两者都不能整除。一个整数能被 2 或 5 整除，当且仅当它的末位数字是 $0, 2, 4, 5, 6$ 或 8。所以我们要找的是末位数字为 1、3、7 或 9 的整数。

整数 $0, 1, \ldots, 999\,999$ 可分成 100 000 段，每段是十个连续整数 $10k, 10k+1, \ldots, 10k+9$，而每段恰好包含四个我们要找的整数。因此个数为

$$4 \times 100\,000 = 400\,000.$$

（用容斥原理（inclusion–exclusion）也得到相同结果：$10^6 - \frac{1}{2}10^6 - \frac{1}{5}10^6 + \frac{1}{10}10^6 = 400\,000$。）

求平均值时，把每个这样的 n 与 $10^6 - n$ 配对。若 n 的末位数字是 $1, 3, 7, 9$，则 $10^6 - n$ 的末位数字分别是 $9, 7, 3, 1$，而且因为 $n \neq 0$，所以 $0 < 10^6 - n < 10^6$。因此 $n \mapsto 10^6 - n$ 把这个集合映射到它自身，而且这个映射是它自己的逆映射（inverse）。它没有不动点（fixed point），因为 $n = 500\,000$ 是偶数。于是这个集合分成 200 000 对，每对之和为 10^6。

总和是 $200\,000 \times 10^6$，平均值是

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

第 2 部分：小于 4179 且不能被 3 或 7 整除的整数

4179 这个数是精心挑选的：

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

n 能否被 3 或 7 整除，只取决于 n 除以 21 所得的余数。在余数 $0, 1, \ldots, 20$ 之中，3 的倍数有 $0, 3, \ldots, 18$（共七个），7 的倍数有 $0, 7, 14$（共三个），其中 0 在两边都数了一次。所以有 $21 - 7 - 3 + 1 = 12$ 个余数不能被两者中任何一个整除：

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

整数 $0, 1, \ldots, 4178$ 恰好组成 199 个完整的段，每段长 21，所以个数为

$$12 \times 199 = 2388.$$

作为验算，用容斥原理：$4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$。

? **想一想** 这里的数与十进制数字毫无关系，为甚么对称的窍门仍然行得通？

关键在于 21 整除 4179。于是 $4179 - n \equiv -n \pmod 3$ 以及 $\pmod 7$，所以 $3 \mid 4179 - n$ 当且仅当 $3 \mid n$，对 7 亦然。此外，$n = 0$ 已被排除（它能被任何数整除），所以集合中每个 n 都满足 $1 \le n \le 4178$，从而亦有 $1 \le 4179 - n \le 4178$。因此 $n \mapsto 4179 - n$ 把这个集合映射到它自身。它没有不动点，因为 4179 是奇数。于是这 2388 个整数组成 1194 对，每对之和为 4179，平均值是

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

验算

用电脑把所有整数逐一检查，可确认个数 400 000 和 2388 以及平均值 500 000 和 2089.5 完全正确。你也可以亲手验算一个小例子：在小于 21 的范围内，上面列出的十二个余数之和为 $126 = 12 \times \frac{21}{2}$，所以它们的平均值是 $10.5 = \frac{21}{2}$，与配对论证所预测的完全一致。

常见错误

- 把“不能被 2 或 5 整除”理解为“不能同时被两者整除”，即不能被 10 整除。这样会得出 900 000 个整数。

- 使用容斥原理时，忘记把 21 的倍数（或 10 的倍数）加回去，因为它们被减了两次。
- 没有检查集合是否对称，就假定平均值必定是范围的中点。这里之所以行得通，只因为 10 整除 10^6，而 21 整除 4179。

STEP 之外

在 $1, \ldots, m$ 之中与 m 互质(coprime)的整数的个数,就是欧拉函数(Euler's totient function) $\varphi(m)$。这里 $\varphi(10) = 4$ 及 $\varphi(21) = 12$, 而所求的个数就是 $\varphi(10^6) = 400\,000$ 和 $199\,\varphi(21)$。配对 $n \leftrightarrow m - n$ 说明，当 $m > 2$ 时，与 m 互质的整数之和总是 $\frac{1}{2}m\,\varphi(m)$，这个事实是踏入模 m 整数算术的第一步。想进一步阅读，达文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是极佳的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。