详细解答

STEP III 1998，第 9 题

力学 · 转动惯量

> **STEP III 1998，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q9

关键思路

实心圆锥可以看成由一叠薄圆盘堆叠而成，圆盘的半径随着与顶点的距离线性增长。只要知道薄圆盘的转动惯量（moment of inertia）（绕其轴线的，以及绕一条直径的），便可以用一个积分把各薄片的贡献加起来。至于第二条轴，我们需要垂直轴定理（perpendicular axis theorem）（把圆盘绕轴线的转动惯量化为绕直径的转动惯量）和平行轴定理（parallel axis theorem）（把该轴平移到顶点）。之后的摆动就是一个复摆（compound pendulum），其周期所需要的正是绕顶点的转动惯量。

解答

建立薄片

把顶点置于原点，圆锥的轴线沿 z 轴，于是底面就是平面 $z = h$。设 ρ 为（恒定的）密度。在高度 z 处的横截面是一个圆盘，由相似三角形可知其半径为

$$r = \frac{az}{h},$$

厚度为 δz 的薄片是一个薄圆盘，质量为 $\delta m = \rho\pi r^2\,\delta z = \rho\pi\dfrac{a^2z^2}{h^2}\,\delta z$。积分得

$$m = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h, \qquad \text{所以} \qquad \rho\pi = \frac{3m}{a^2h}.$$

绕轴线的转动惯量

质量为 M、半径为 r 的均匀圆盘，绕其轴线的转动惯量为 $\frac{1}{2}Mr^2$。（把它分割成半径为 s、质量为 $\frac{2Ms}{r^2}\,\delta s$ 的圆环；每个圆环的贡献是其质量的 s^2 倍，而 $\int_0^r \frac{2M}{r^2}s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}Mr^2$。）

圆锥的每一块薄片的中心都在轴线上，所以各薄片的贡献可以直接相加：

$$\begin{aligned} I_{\text{轴}} &= \int_0^h \tfrac{1}{2} r^2 \, \rho\pi r^2 \, \mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho\pi \frac{a^4}{h^4} \int_0^h z^4 \, \mathrm{d}z = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{3m}{a^2 h} \cdot a^4 h = \frac{3}{10} m a^2, \end{aligned}$$

正如所求。

绕过顶点的轴的转动惯量

我们要用到两个定理。

- **垂直轴定理**。对于位于某平面内的薄片（lamina），绕一条垂直于该平面的轴的转动惯量，等于绕平面内任意两条互相垂直、并与该轴交于同一点的轴的转动惯量之和。
- **平行轴定理**。若质量为 M 的物体绕一条通过其质心（centre of mass）G 的轴的转动惯量为 I_G，则它绕一条与之平行、相距 d 的轴的转动惯量为 $I_G + Md^2$。

对于薄圆盘，由对称性可知两条直径是等价的，所以垂直轴定理给出 $2I_{\text{直径}} = \frac{1}{2}Mr^2$，即 $I_{\text{直径}} = \frac{1}{4}Mr^2$。

取过顶点且平行于底面的轴 ℓ（例如沿 x 轴）。在高度 z 处的薄片，其质心在 z 轴上，与 ℓ 相距 z，而它本身平行于 ℓ 的那条直径正通过该质心。由平行轴定理，这块薄片的贡献为 $\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\delta m$。因此

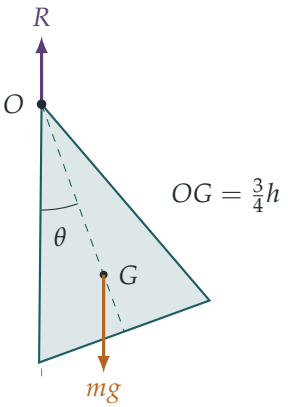
$$\begin{aligned} I_{\text{顶点}} &= \int_0^h \left(\frac{a^2 z^2}{4h^2} + z^2\right) \rho\pi \frac{a^2 z^2}{h^2} \, \mathrm{d}z = \rho\pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right) \frac{h^5}{5} \\ &= \frac{3m}{a^2 h} \cdot \frac{a^2 h^3}{5} \cdot \frac{a^2 + 4h^2}{4h^2} = \frac{3m}{20}\left(a^2 + 4h^2\right). \end{aligned}$$

> ? **想一想** 为甚么不能一次过对整个圆锥应用平行轴定理，由质心平移过去？

其实可以，但我们暂时还不知道绕过 G 的平行轴的转动惯量；那正是需要计算的东西。分割成薄片就可以避开这一点，因为每个圆盘绕自身直径的转动惯量是已知的，而且每个圆盘的中心都在轴线上，与 ℓ 的距离是已知的 z。（顺带可得 $I_G = I_{\text{顶点}} - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3m}{80}(4a^2 + h^2)$。）

绕顶点的小幅摆动

把圆锥视为刚体，可绕一条通过其顶点、垂直于运动平面的光滑水平轴自由转动。这样的轴平行于底面，所以绕它的转动惯量就是 $I_{\text{顶点}}$。设 θ 为圆锥轴线与铅垂向下方向之间的夹角。



轴上的反作用力对 O 没有力矩，所以唯一的力矩来自重力；重力作用于 G，与 O 相距 $\frac{3}{4}h$。它对 O 的力矩为 $mg \cdot \frac{3}{4}h\sin\theta$，其作用是使 θ 减小。对该轴取力矩，

$$I_{\text{顶点}}\,\ddot{\theta} = -\tfrac{3}{4}mgh\sin\theta.$$

对于小幅摆动，$\sin\theta \approx \theta$，所以

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3m}{20}(a^2+4h^2)} = \frac{5gh}{4h^2+a^2}.$$

这是简谐运动（simple harmonic motion），周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4h^2+a^2}{5gh}},$$

正如所求。

验算

- 单位：$\frac{4h^2+a^2}{gh}$ 的单位是 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot\mathrm{m}) = \mathrm{s}^2$，与周期的平方应有的单位一致。
- 细长圆锥（$a \to 0$）：全部质量都集中在轴线上，而 $\int z^2\,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}mh^2$，与 $I_{\text{顶点}} \to \frac{3}{5}mh^2$ 吻合。周期变成 $2\pi\sqrt{4h/(5g)}$，即长度为 $\frac{4}{5}h$ 的单摆（simple pendulum）的周期；这个长度比 $\frac{3}{4}h$ 长，对于质量沿长度方向分布的物体来说，理应如此。
- 数值验算：取 $m = 1$、$a = 0.7$、$h = 2.3$，用辛普森法则（Simpson's rule）对薄片求和，以及在圆锥内以蒙地卡罗（Monte Carlo）方法抽样取点，两者都得出 $I_{\text{轴}} = 0.147$ 和 $I_{\text{顶点}} \approx 3.2475$，与公式吻合；取 $g = 9.81$，由小振幅出发对 $I\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mgh\sin\theta$ 逐步作数值计算，得出周期为 2.7525 s，与公式的预测一致。

常见错误

- 在第二部分对每块薄片使用 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$：绕一条平行于底面的轴时，圆盘是绕其直径转动的，贡献为 $\frac{1}{4}r^2\,\delta m$，而不是 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$。
- 由顶点而不是由质心出发应用平行轴定理：只有当两条轴的其中一条通过质心时，该定理才成立。
- 把圆锥当作长度为 $\frac{3}{4}h$ 的单摆；决定周期的是转动惯量，而不仅仅是 G 的位置。

STEP 之外

绕过某一点的任意轴的转动惯量，全部记录在一个对称的 3×3 矩阵之中，这个矩阵称为惯性张量（inertia tensor）；垂直轴定理和平行轴定理，正是它在旋转和平移下如何变化的特殊情况。它的特征向量（eigenvectors）称为主轴（principal axes），可以解释为甚么旋转的物体绕某些轴转动时稳定，绕另一些轴时却会摇晃。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以这个程度讲述刚体转动和复摆。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。