详细解答

STEP III 1998，第 8 题

纯数学 • 球面的向量几何

STEP III 1998，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q8

关键思路

这里的一切都归结为同一个做法：把“点 $\mathbf{r}$ 位于球面上”写成纯量方程（scalar equation）$|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2 = a^2$，用点积（dot product）展开，然后读出所需的结果。对于 (i) 中的直线，这样会得到一个关于 λ 的二次方程，交点的数目由其判别式（discriminant）决定。对于 (ii)，我们需要球心到平面的距离；而对于 (iii)，把两个球面方程相减，得到的正是“垂直”所问及的那个点积。

解答

第 (i) 部分

点 $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}$ 位于球面上，当且仅当 $(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m})\cdot(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}) = a^2$。展开，并利用 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$（因为 $\mathbf{m}$ 是单位向量（unit vector）），得

$$\lambda^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\lambda + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2 = 0.$$

每一个实根 λ 给出一个交点，而不同的 λ 值给出不同的点（因为 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$）。所以，有两个交点当且仅当这个二次方程有两个相异实根，即其判别式为正：

$$4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2 - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2) > 0 \iff a^2 > \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2,$$

这就是所要求的条件。

当判别式为零时，恰好有一个交点：

$$a^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2.$$

这时重根为 $\lambda = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}$（即 λ 的系数的一半再取负号），所以该点为

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m}, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}) = 0,$$

这里再次用到 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$。所以切线（tangent line）垂直于通往切点的半径，这正是应有的结果。

第 (ii) 部分

垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面，其方程为 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = k$，其中 k 为常数；由于 $\mathbf{n}$ 是单位向量，该平面与原点的距离为 $|k|$。选取 $\mathbf{n}$ 的正负号使 $k \geq 0$（即 $\mathbf{n}$ 由原点指向平面），则平面为

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = l.$$

想一想 球心 $\mathbf{d}$ 与这个平面相距多远?

由 $\mathbf{d}$ 出发沿法线（normal）方向走：点 $\mathbf{d} + \mu\mathbf{n}$ 位于平面上，当 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \mu = l$，所以 $\mu = l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$。这一点就是由 $\mathbf{d}$ 所作垂线的垂足（foot of the perpendicular），所以球心到平面的距离为 $|\mu| = |l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}|$。

平面与球面相切，当且仅当这个距离等于半径（距离较小时，平面与球面相交于一个圆；距离较大时，两者不相交）。所以条件是

$$|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l| = a, \qquad \text{等价于} \qquad (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l)^2 = a^2,$$

即 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = l \pm a$。（若 $\mathbf{n}$ 改为背向平面，则平面的方程为 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -l$，而条件变成 $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + l| = a$。）

第 (iii) 部分

第一个球面的球心为 O，第二个的球心为 D（位置向量（position vector）为 $\mathbf{d}$），两者半径均为 a。点 $\mathbf{r}$ 同时位于两个球面上，当

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2 \qquad \text{及} \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = a^2.$$

把第二式展开再减去第一式，得 $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 0$，所以每一个交点都满足

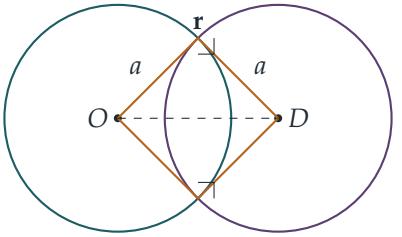
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}.$$

通往点 $\mathbf{r}$ 的两条半径是向量 $\mathbf{r}$（由 O 出发）和 $\mathbf{r} - \mathbf{d}$（由 D 出发）。两者垂直，当

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = a^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$$

等于零。右边的式子与我们所选的交点无关，所以若 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$，则在每一个交点处两条半径都互相垂直，这正是我们要证明的。（这个论证也可以倒过来：只要在其中一个公共点处两条半径互相垂直，便有 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$。）

在这个情况下，两个球面确实相交：$|\mathbf{d}| = \sqrt{2}\,a$ 严格介乎 0 与 $2a$ 之间，所以两者相交于一个圆。通过 O 和 D 的截面（cross-section）显示了其中的直角。



在平面上，两个半径为 a 的圆若在公共点处的半径互相垂直，则 OD 是一个等腰直角三角形的斜边，所以 $OD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$：用毕氏定理（Pythagoras' theorem）得到同一答案。

验算

- 在 (i) 中，取 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$：直线通过球心，条件变成 $a^2 > 0$，而这样的直线确实总与球面相交于两点。
- 在 (ii) 中，若球心在原点（$\mathbf{d} = \mathbf{0}$），条件就是 $l = a$：平面与球心的距离为 a 时，便与球面相切。
- 数值上，取 $a = 1$ 及 $|\mathbf{d}| = 1.2$（而非 $\sqrt{2}$），其中一个交点为 $(0.6, 0.8, 0)$，而 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = 1 - 0.72 = 0.28 \neq 0$，与 $a^2 - \frac{1}{2}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$ 吻合。对全部三个部分所作的随机测试，结果的误差均在 10^{-13} 以内。

常见错误

- 忘记 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$，以致 λ^2 带着一个不必要的系数。
- 把 (ii) 中的相切条件只写成 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l = a$：球心可以在平面的任何一侧。

STEP 之外

$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2$ 这个量就是 $|\mathbf{b}\times\mathbf{m}|^2$，即原点到直线的距离的平方；而 $\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}$ 是 $\mathbf{b}$ 除去 $\mathbf{m}$ 方向分量后的正交投影（orthogonal projection），这个概念正是线性代数（linear algebra）的核心。以直角相交的球面称为正交（orthogonal）球面，它们在反演几何（inversive geometry）和双曲几何（hyperbolic geometry）的模型中都占有中心地位。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲述投影；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（复分析的视觉化讲解）则展示正交圆的实际应用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。